This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

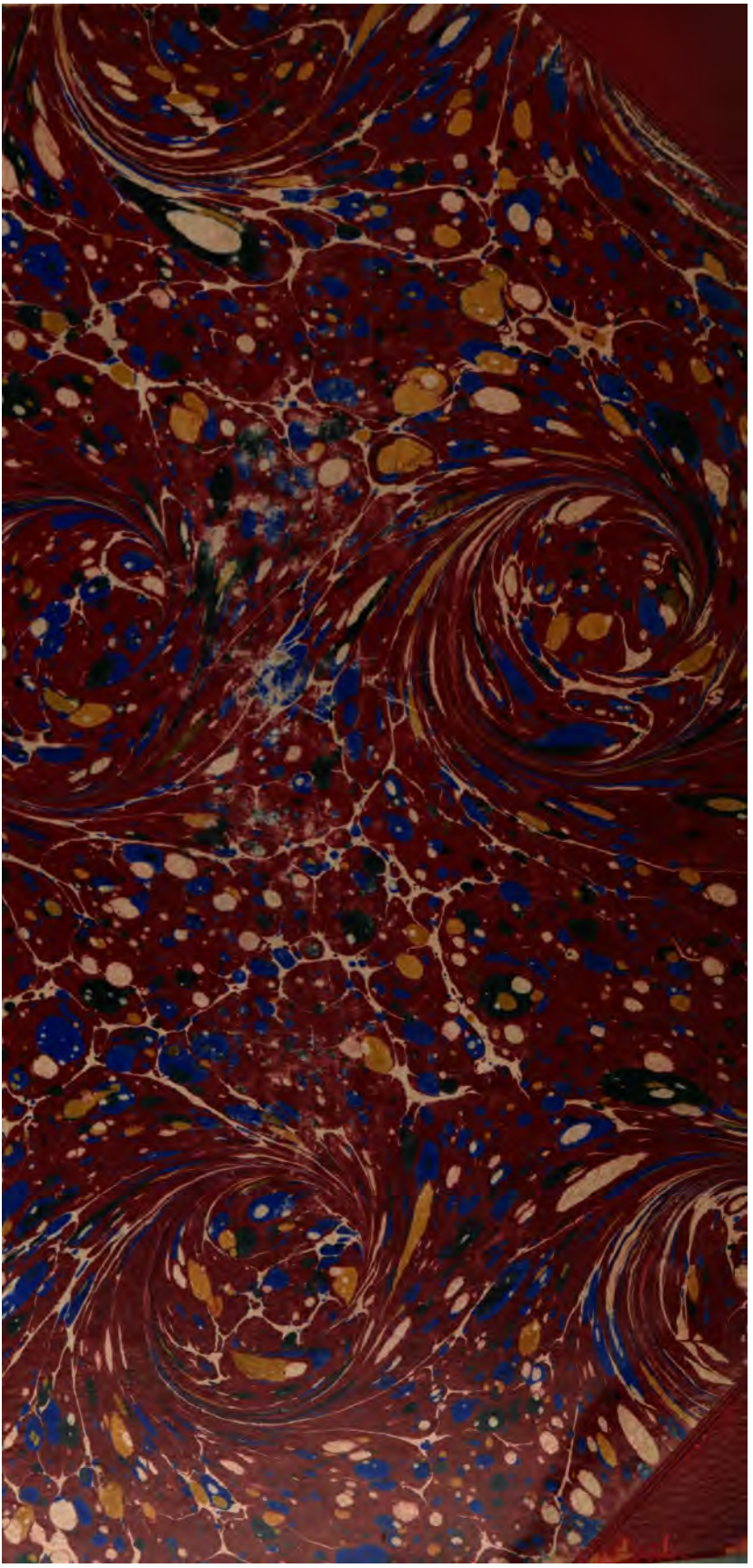
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.



Math 8509.00

SCIENCE CENTER LIBRARY

FROM THE

CONSTANTIUS FUND

Established by Professor E. A. SOPHOCLES of Harvard University for "the purchase of Greek and Latin books, (the ancient classics) or of Arabic books, or of books illustrating or explaining such Greek, Latin, or Arabic books." (Will, dated 1880.)

Lehrbuch

der

analytischen Geometrie

in

homogenen Koordinaten

von

Dr. Wilhelm Killing,
Professor der Mathematik an der Kgl. Akademie zu Münster i. W.

Zweiter Teil:

Die Geometrie des Raumes.

Paderborn.
Druck und Verlag von Ferdinand Schöningh.
1901.

Mahr 8509.00

HARVARD COLLEGE
FEB 20 1906
LIBRARY.
Constantius Fund
(II)

Inhaltsverzeichnis.

§ 1. **Teilung von Ebenenwinkeln** Seite 1.

1. Vorbemerkung. 2. Ebenenbüschel, Keil. 3. Verhältnis der Teilung eines Keiles. 4. Doppelverhältnis. 5. 6. Das Doppelverhältnis von vier Ebenen eines Büschels ist gleich dem ihrer Schnittlinien mit einer beliebigen Ebene oder der Schnittpunkte mit einer beliebigen Geraden. 7. Quadrupel von Punkten, Geraden oder Ebenen, deren Doppelverhältnisse gleich sind. 8. Bemerkung über das Schnittverhältnis einer Strecke. Übungen.

§ 2. **Das Koordinaten-Tetraeder** S. 7.

1. Teilung des Raumes durch drei Ebenen. 2. 3. Die vier Seitenflächen eines Tetraeders teilen den Raum in fünfzehn Teile. 4. 5. Diese Raumteile werden in doppelter Weise charakterisiert. 6. Aufzählung derselben. 7. Vorzeichen der Senkrechten, welche von einem Punkte auf die Koordinaten-Ebenen gefällt werden. 8. Beziehung zwischen diesen Senkrechten. Übungen.

§ 3. **Die Geraden und die Ebenen des Raumes** S. 13.

1. Die Senkrechten für drei in gerader Linie liegende Punkte. 2. 3. Vier Punkte einer Ebene. 4. Gleichung der Ebene. 5. Die von drei Punkten einer Gerade auf eine Ebene gefällten Senkrechten. 6. 7. Die von einem Punkte auf fünf feste Ebenen gefällten Senkrechten. 8. Nochmals die Gleichung der Ebene. 9. Umwandlung der Koordinaten. Übungen.

§ 4. **Die von den Ecken des Tetraeders auf eine Ebene gefällten Senkrechten** S. 21.

1. Lage einer Ebene zu einem Tetraeder. 2. Die von den Ecken des Tetraeders auf eine Ebene gefällten Senkrechten. 3. Beziehung zwischen diesen Senkrechten. 4. Drei Ebenen eines Büschels. 5. Vier durch einen Punkt gehende Ebenen. 6. 7. Die von fünf Punkten auf eine Ebene gefällten Senkrechten. 8. Gleichung eines Punktes. 9. Umwandlung der Ebenen-Koordinaten. Übungen.

§ 5. **Die allgemeinsten Tetraeder-Koordinaten** S. 29.

1. Zusammengehörige Punkt- und Ebenen-Koordinaten. 2. Die Koordinaten für Punkte einer Geraden und einer Ebene. 3. Die Koordinaten für Ebenen einer Geraden und eines Punktes. 4. Die Gleichungen der Ebenen eines Büschels; Doppelverhältnisse. 5. Die Gleichungen für die Ebenen eines Bündels. 6. Punkte einer Ebene. 7. Projektive Zuordnung. 8. 9. Transformation zusammengehöriger Koordinaten. Übungen.

§ 6. **Die uneigentlichen Gebilde des Raumes** S. 38.

1. Parallele Gerade haben denselben unendlichfernen Punkt. 2. Die uneigentliche Gerade einer Ebene. 3. Schnittpunkt einer Geraden und einer Ebene, sowie dreier Ebenen. 4. 5. Die einfachsten Konstruktionen für uneigentliche Gebilde. Die unendlichferne Ebene. 6. 7. 8. Teilung des Raumes durch zwei, drei und vier Ebenen. 9. 10. Doppelverhältnisse bei uneigentlichen Gebilden. Übungen.

§ 7. **Die Quotienten der Koordinaten als Doppelverhältnisse** S. 49.

1. Der Einheitspunkt. 2. 3. Die Verhältnisse der vier Koordinaten eines Punktes. 4. Die Einheitsebene als Harmonikalebene des Einheitspunktes. 5. Die Verhältnisse der vier Koordinaten einer Ebene. 6. 7. Bestimmung der Lage eines Punktes durch die Verhältnisse seiner Koordinaten. 8. Dieselbe Bestimmung für eine Ebene. 9. 10. Die homogenen Koordinaten. Übungen.

§ 8. **Specielle Koordinatensysteme** S. 52.

1. Vorbemerkung. 2. Punktkoordinaten für ein Tetraeder mit einem unendlichfernen Eckpunkte. 3. Schweringsche Ebenenkoordinaten. 4. 5. Cartesische Punktkoordinaten. 6. 7. Plückersche Ebenenkoordinaten. 8. 9. Hessesche Ebenenkoordinaten. 10. Beziehung der Hesseschen Koordinaten zu einander und zu den rechtwinkligen Cartesischen Koordinaten. Übungen.

§ 9. **Ebene Systeme und Strahlenbündel** S. 60.

1. 2. Untersuchung der in einer Koordinatenebene gelegenen Punkte. 3. 4. Dreieckskoordinaten in einer beliebigen Ebene. 5. 6. Linienkoordinaten in einer Koordinatenebene. 7. 8. Gleichung einer ebenen Kurve in räumlichen Ebenenkoordinaten. 9. Strahlenbündel. 10. 11. Analytische Darstellung seiner Strahlen und Ebenen. Übungen.

§ 10. **Der Kegel zweiter Ordnung und zweiter Klasse** S. 68.

1. Die Kegelfläche. 2. Der Kegel n^{ter} Ordnung. 3.—10. Der Kegel zweiter Ordnung. 3. Der eigentliche Kegel zweiter Ordnung. 4. Er ist durch fünf seiner Strahlen bestimmt. 5. 6. Polarentheorie. 7. 8. Einteilung. 9. Die uneigentlichen Kegel. 10. Der Kegelbüschel. 11.—15. Der Kegel zweiter Klasse. 11. 12. Grundeigenschaften. 13. 14. Die uneigentlichen Kegel zweiter Klasse. 15. Die Kegelschar. 16. 17. Andere Behandlung des Kegels. Übungen.

§ 11. **Die Oberflächen zweiter Ordnung** S. 80.

1. Darstellung durch Punktkoordinaten. 2. Die Fläche ist durch neun Punkte bestimmt. 3. 4. 5. Schnitt mit einer beliebigen Ebene. 6. 7. Schnitt mit einer geraden Linie. 8. Geraden auf einer Fläche. 9. Die Fläche n^{ter} Ordnung. Übungen.

§ 12. **Pol und Polarebene einer Fläche zweiter Ordnung** S. 86.

1. Konjugierte Pole. 2. Die Polarebene eines Punktes. Die eigentliche Fläche zweiter Ordnung. 3. Jede Ebene kann zur Polarebene gewählt werden. 4. Reciproke Polaren. 5. Die Polarebenen zu den Punkten einer Ebene. 6. Doppelverhältnisse von vier Punkten einer Geraden und von ihren Polarebenen. Übungen.

§ 13. **Die Tangentialebenen der Flächen zweiter Ordnung** S. 92.

1. 2. Die Tangente und die Tangentialebene. 3. 4. Die Tangentialebene als Polarebene. 5. Die Schnittlinie einer Tangentialebene ist ein Linienpaar. 6. Die Tangentialebenen längs einer ebenen Schnittkurve. 7. Der Tangentialkegel. 8. 9. Gegenseitige Lage von zwei reciproken Polaren. 10. 11. Gleichung der Fläche in Ebenenkoordinaten. Übungen.

§ 14. **Polartetraeder einer Fläche zweiter Ordnung** S. 101.

1. Das Polartetraeder. 2. 3. Bestimmung eines solchen. 4. 5. 6. Darstellung der Fläche durch vier Quadrate. 7. Mittelpunkt der Fläche. 8. 9. Konjugierte Durchmesser. 10. Berührungscylinder. Übungen.

§ 15. **Der Kegel zweiter Ordnung** S. 109.

1. Die Fläche zweiter Ordnung mit einem singulären Punkte. 2. Die Polarebenen. 3. Konjugierte Polaren. 4. Die Kegelfläche. 5. Verschwinden der Determinante. 6. Sätze für die Kegelfläche. 7. 8. Darstellung der Fläche. Übungen.

§ 16. **Das Ebenenpaar** S. 118.

1. Die Fläche zweiter Ordnung mit einer singulären Linie. 2. 3. Das Ebenenpaar. 4. 5. Polare Beziehungen. 6. Einfachste Form der Gleichung. Übungen.

§ 17. **Die Doppelebene** S. 122.

1. Zusammenfallen aller Polarebenen. 2. Doppelebene. 3. Einfachste Darstellung. Übungen.

§ 18. **Einteilung der Flächen zweiter Ordnung nach projektiven Eigenschaften** S. 125.

1. Die eigentliche Fläche. 2. Die Kegelfläche. 3. Das Ebenenpaar. 4. Die Doppelebene. 5. Einteilung der eigentlichen Flächen. 6. Die imaginäre Fläche. 7.—11. Die ungeradlinige Fläche. 7. Schnitt mit einer Ebene. 8. Aufsen- und Innenpunkte. 9. Lage eines Polartetraeders zur Fläche. 10. Polare eines Aufsen- und eines Innenpunktes. 11. Lage der Fläche zu zwei reciproken Polaren. 12.—16. Die geradlinigen Flächen. 12. 13. Die zwei Scharen von Erzeugenden. 14. Die Lage eines Punktes zur Fläche. 15. Die Lage von zwei reciproken Polaren. 16. Die Geraden, von denen drei windschiefe Gerade geschnitten werden. 17. Einteilung der Kegel. 18. Einteilung der Ebenenpaare. 19. Zusammenfassung. Übungen.

§ 19. **Metrische Einteilung der Flächen zweiter Ordnung** S. 143.

1. Wahl der Koordinaten. 2. Die imaginäre Fläche. 3. Einteilung der ungeradlinigen Flächen. 4. Das Ellipsoid. 5. Das zweischalige Hyperboloid. 6. Das elliptische Paraboloid. 7. Einteilung der geradlinigen Flächen. 8. Das einschalige Hyperboloid. 9. Das hyperbolische Paraboloid. 10. Der imaginäre Kegel und der imaginäre Cylinder. 11. Der reelle Kegel. 12.—15. Einteilung der reellen Cylinder. 16. 17. Einteilung der Ebenenpaare. 18. Die Doppelebene. 19. Zusammenfassung. Übungen.

§ 20. **Die Oberflächen zweiter Klasse** S. 155.

1. Definition. 2. Bestimmung durch neun Ebenen. 3. Konjugierte Polarebenen. 4. Der Pol einer Ebene. 5. Zu jedem Punkte gehört für eigentliche

Flächen eine Polarebene. 6. Die Tangentialebene. 7. Beziehung eines Pols zu seiner Polarebene. 8. Gleichung der Fläche in Punktkoordinaten. 9. Nochmals das Polartetraeder. 10. Konjugierte Durchmesserebenen. Übungen.

§ 21. **Die Grenzfläche zweiter Klasse** S. 162.

1. Bedingung für eine singuläre Ebene. 2. Die Pole der übrigen Ebenen. 3. Zu jedem Pole gehören unendlich viele Ebenen. 4. 5. Die Grenzfläche. 6. Jeder eigentliche Kegelschnitt kann als Grenzfläche betrachtet werden. 7. Einfachste Darstellung. Übungen.

§ 22. **Das Punktepaar und der Doppelpunkt** S. 166.

1. Bedingung für einen singulären Ebenenbüschel. 2. Die Pole liegen in der singulären Linie. 3. 4. Das Punktepaar. 5. Der Doppelpunkt. Übungen.

§ 23. **Einteilung der Flächen zweiter Klasse** S. 169.

1.—4. Projektive Einteilung. 5.—9. Beziehungen zur unendlichfernen Ebene. Übungen.

§ 24. **Der Flächenbüschel zweiter Ordnung** S. 176.

1. Der Flächenbüschel m^{ter} Ordnung. 2. Gemeinsame Pole für die Flächen eines Büschels zweiter Ordnung. 3. Schnitt der Polarebenen eines Punktes. 4. 5. Die Polarebenen zu den Spitzen der dem Büschel angehörenden Kegel. 6. Projektive Zuordnung der Polarebenen. 7. Für vier Punkte fallen die Polarebenen in Bezug auf alle Flächen des Büschels zusammen. 8. Diese Punkte bilden die Ecken eines gemeinsamen Polartetraeders. 9. Sie sind die Spitzen der im Büschel enthaltenen Kegel. 10. 11. Darstellung von zwei quadratischen Formen durch Quadrate. 12. 13. Der auf einer Ebene erzeugte Kegelschnittsbüschel. 14. Specielle Arten dieser Büschel. 15. Schnitt der Flächen des Büschels durch eine gerade Linie. 16. 17. Andere Art der analytischen Behandlung. 18. 19. Die Raumkurve vierter Ordnung erster Species. Übungen.

§ 25. **Einige Flächenbüschel von speciellem Charakter** S. 201.

1. Vorbemerkung. 2.—4. Flächen mit zwei gemeinschaftlichen Kegelschnitten. 3. Sie haben unendlich viele gemeinsame Polartetraeder. 4. Analytische Darstellung. 5.—7. Flächen, welche einander längs eines Kegelschnittes berühren. Ähnliche Flächen zweiter Ordnung. 8.—12. Flächen, welche sich in einer Geraden und einer kubischen Raumkurve schneiden. 8. Analytische Darstellung. 9. Gemeinsame Polarebenen. 10. Die kubische Raumkurve. 11. Der durch eine kubische Raumkurve gelegte Flächenbündel. 12. Darstellung der kubischen Raumkurve. Übungen.

§ 26. **Die Flächenschar zweiter Klasse** S. 214.

1. Jede Raumkurve führt auf eine abwickelbare Fläche, welche von den Tangenten der Kurve erzeugt und von ihren Schmiegungsebenen berührt wird. 2. 3. Zu jeder stetigen Folge von Ebenen gehört eine Raumkurve, an welche jene Ebenen Schmiegungsebenen sind. 4. Die Flächenschar m^{ter} Klasse. 5. Die Flächenschar zweiter Klasse; die zu einer Ebene gemeinschaftlichen Polarebenen. 6. 7. Das gemeinsame Polartetraeder. 8. Die Kegelschnitte der Schar. 9. Die Schar der von einem Punkte ausgehenden Tangentialkegel. 10. Die durch einen Punkt gehenden Flächen der Schar. 11.—13. Die Kegelschar, für welche die gemeinschaftliche Spitze auf einem Kegelschnitte der Schar liegt. 14. Die durch eine Gerade gelegten Tangentialebenen. Übungen.

Anhang über kollineare und reciproke Zuordnung im Raume S. 227.

1. Kollineare Zuordnung einer Ebene zu einem Strahlenbündel und zweier Strahlenbündel zu einander. 2. Perspektive Zuordnung zweistufiger Gebilde. 3. Übergang von Ebenen zu Strahlenbündeln und umgekehrt. 4. In kollinear entsprechenden Gebilden sind einstufige Gebilde einander projektiv zugeordnet. 5 Die kollineare Zuordnung zweistufiger Gebilde wird durch vier Paare von Elementen vermittelt. 6.—13. Kollineare Zuordnung zweier Räume. 6. Vorbemerkung. 7. Definition. 8. Einfachste analytische Darstellung. 9. 10. 11. Fünf Punktepaare oder fünf Ebenenpaare vermitteln die kollineare Zuordnung zweier Räume. 12. Analytische Darstellung bei Benutzung desselben Koordinatensystems. 13. Entsprechende Flächen in kollinearen Räumen. 14.—16. Reciproke Zuordnung zweistufiger Gebilde. 17.—24. Reciproke Zuordnung zweier Räume. 17. Definition. 18. Ebenen, Strahlenbündel, Punkte u. s. w. in reciproken Räumen. 19. 20. Die reciproke Zuordnung zweier Räume wird durch Zuordnung von fünf Punkten des einen zu fünf Ebenen des andern vermittelt. 21. Analytische Darstellung. 22. Entsprechende Flächen. 23. Das räumliche Polarsystem. 24. Die Ordnungsfläche eines Polarsystems. Übungen.

§ 27. **Projektivität und Metrik** S. 245.

Beziehung der projektiven Eigenschaften zu kollinearen Umgestaltungen. Metrische Eigenschaften: Beziehung zu der unendlichfernen Ebene und zur wirklichen Messung. Wahre Grundlage der Projektivität. Die Projektivität und die homogenen Koordinaten. Wichtigkeit der Projektivität für die Metrik. Übungen.

§ 28. **Kugel und Kugelkreis** S. 251.

1. Gleichung einer Kugel in Hesseschen Koordinaten. 2. Ähnlichkeitspunkte zweier Kugeln. 3. 4. Die Ähnlichkeitspunkte bei drei und bei vier Kugeln. 5. Der unendlichferne Kugelkreis. 6. Der Kugelbüschel. 7. Die Potenzebenen bei zwei, drei und vier Kugeln. 8. Schar konzentrischer Kugeln. 9. 10. Der Winkel zweier Ebenen durch die Lage zum unendlichfernen Kugelkreise bestimmt. 11. Der Winkel zweier Geraden. Übungen.

§ 29. **Hauptaxenproblem der Flächen zweiter Ordnung** S. 262.

1. Vorbemerkung. 2. Zerlegung der Gesamtaufgabe. Problem A). 3. Problem B). 4. Problem C). 5. Problem D). 6. Problem E). 7.—15. Erste Lösung des Problems C). 7. Die Gleichung $\Delta(\omega) = 0$. 8. Diese Gleichung hat nur reelle Wurzeln. 9. Explicite Darstellung der Koordinaten des zu einer Wurzel gehörenden Punktes. 10. Das gemeinsame Polardreieck. 11. Zweiter Beweis für die Realität der Wurzeln. 12.—14. Die Gleichung hat eine Doppelwurzel. 15. Fall einer dreifachen Wurzel. Gesamtresultat. 16. Lösung des Problems B). 17. Lösung des Problems A). 18. Lösung des Problems E). Übungen.

§ 30. **Zweite Lösung des Hauptaxenproblems** S. 279.

1. Geometrische Bedeutung der Wurzeln der Gleichung $\Delta(\omega) = 0$. 2. Umgestaltung dieser Gleichung. 3. Dritter Beweis für die Realität der Wurzeln. 4. Bedingungen für die Gleichheit zweier Wurzeln. 5. 6. 7. Einzelne specielle Fälle der Gleichung. 8. Beziehungen zwischen den neuen Transformations-Koefficienten. 9. Zurückführung der neun Koefficienten auf drei unbekannte Gröfsen. 10. Berechnung dieser drei Gröfsen. 11. Realität der Koefficienten. 12. Nachweis, dafs die gefundenen Koefficienten das Problem wirklich lösen. Übungen.

§ 31. **Nochmalige Einteilung der Flächen zweiter Ordnung** S. 289.

I. Die Fläche wird von der unendlichfernen Ebene nicht berührt. II. Diese Ebene berührt in einem Punkte. III. Die Ebene berührt längs einer geraden Linie. Die erhaltenen Arten sind bereits in § 19 gefunden. Übungen.

§ 32. **Die Rotationsflächen zweiter Ordnung** S. 302.

1. Allgemeine Definition der Umdrehungsflächen. 2. Ihre Gleichung bei einer besondern Wahl des Koordinatensystems. 3. Bedingungsgleichungen für Rotationsflächen zweiter Ordnung. 4. Diese Flächen haben unendlich viele Tripel von Axen. 5. Sie gehen mit dem unendlichfernen Kugelkreise eine doppelte Berührung ein. 6. 7. Schnitt der Rotationsflächen zweiter Ordnung mit einer Kugel, deren Mittelpunkt auf der Axe liegt. 8. Gleichung einer solchen Fläche in Ebenenkoordinaten. Brennpunkte. 9. Lage eines Punktes zu seiner Polarebene. Übungen.

§ 33. **Die Kreisschnitte einer Fläche zweiter Ordnung** S. 313.

1. Jeder Kreis hat mit dem unendlichfernen Kugelkreise zwei Punkte gemeinschaftlich. 2. Die Schnittpunkte einer Fläche zweiter Ordnung mit dem unendlichfernen Kugelkreise. 3. Die Kreisschnitte bilden im allgemeinen sechs Scharen paralleler Ebenen. 4. Lage zu den Axen der Fläche. 5. Realität. 6. 7. Jede eigentliche Fläche zweiter Ordnung mit Ausnahme des hyperbolischen Paraboloids, sowie der Kegel und der elliptische Cylinder haben zwei Scharen reeller Kreise. 8. 9. Zweite Herleitung der Kreisschnitte. 10. Die Mittelpunkte paralleler Kreise. 11. Die Kreis- oder Nabelpunkte. Übungen.

§ 34. **Die konfokalen Kegel zweiter Ordnung** S. 323.

1. Die Schar der konfokalen Kegel; die Geradenpaare der Schar; Brennstrahlen. 2. Konjugierte Polarebenen. 3. Schnitt dieser Ebenen mit den Hauptebenen. 4. Die Direktrixebenen. 5. 6. In jedem vom Mittelpunkte ausgehenden Strahl treffen sich zwei Kegel der Schar; Paare von Tangentialebenen, welche durch einen solchen Strahl gelegt werden können. 7. Darstellung durch Punktkoordinaten. 8. Der sphärische Kegelschnitt. 9. Konfokale Kegel bei beliebiger Lage der Koordinaten. Übungen.

§ 35. **Die Schar der konfokalen Flächen zweiter Ordnung** S. 332.

1. Definition konfokaler Flächen. 2. Fokalkurven. 3. Konjugierte Polarebenen. 4. Einteilung der Scharen konfokaler Flächen. 5. 6. Die durch einen Punkt gehenden Flächen der Schar und die von ihm ausgehenden Tangentialkegel. 7. Die Brennstrahlen der Tangentialkegel. 8. Schnitt von zwei konfokalen Flächen. 9. Die geraden Kegel, welche an die Flächen der Schar gelegt werden können. 10. Die Rotationsaxe eines solchen Kegels. 11. 12. Die Geraden des Raumes in ihren Beziehungen zu den Flächen der Schar. 13. Konfokale Mittelpunktsflächen. 14. Fokalhyperbel und Fokalellipse. 15. Konfokale Paraboloide. 16. Die Tangentialkegel in Ebenenkoordinaten. 17. Nochmalige Behandlung der geraden Kegel. 18. Gerade Kegel, die sich durch einen beliebigen Kegelschnitt legen lassen. 19. Zusammengehörigkeit von je zwei Kegelschnitten. 20. Nochmals die Lage der Flächen zu einer festen Geraden. Übungen.

§ 36. **Die konfokalen Flächen zweiter Ordnung in Punktkoordinaten** S. 348.

1. Konfokale Mittelpunktsflächen in Punktkoordinaten. 2. Die drei durch einen Punkt gehenden Flächen der Schar. 3. 4. Elliptische Koordinaten; ihre Beziehung zu den rechtwinkligen Cartesischen Koordinaten. 5. Die Grenzen für die einzelnen elliptischen Koordinaten. 6. 7. Schnitt konfokaler Flächen. 8. Die Krümmungslinien; ihre Arten. 9. Die Gleichung der Tangentialkegel in Punktkoordinaten. Übungen.

§ 1.

Teilung von Ebenenwinkeln.

1. Wir erachten es für angebracht, in den zunächst folgenden Paragraphen von den uneigentlichen Gebilden abzusehen, die wir in I § 8 für jede einzelne Ebene eingeführt haben. Indem wir daher vorläufig unsere Untersuchung auf eigentliche Punkte beschränken, lassen wir den Raum durch jede Ebene in zwei Teile, die Ebene durch eine jede in ihr gelegene Gerade in zwei Halbebenen und die Gerade durch jeden ihrer Punkte in zwei Strahlen geteilt werden.

2. Alle Ebenen, welche durch dieselbe gerade Linie hindurchgehen, bilden einen Ebenenbüschel; die gemeinsame Schnittlinie derselben bezeichnen wir als die Axe (oder auch als die Kante) des Büschels. Den Winkel, den zwei in derselben Kante begrenzte Halbebenen mit einander bilden, nennen wir einen Keil. Seiner Gröfse nach stimmt derselbe mit dem Neigungswinkel der Halbebenen überein. Wie bei den von zwei Halbgeraden gebildeten Winkeln spricht man auch hier von Neben- und Scheitelkeilen.

Wenn mehrere Halbebenen in derselben Kante begrenzt werden, so ist es notwendig, die Keile, welche je zwei dieser Halbebenen mit einander bilden, gleichmäfsig zu messen. Zu dem Ende setzt man eine Richtung fest, nach welcher jedesmal die erste Halbebene gedreht werden soll, bis sie mit der zweiten zur Deckung gelangt. Sind I, II, III drei Halbebenen, welche dieselbe Kante besitzen, so unterscheidet sich die Summe der Keile (I II) und (II III) vom Keile (I III) höchstens um Vielfache von vier Rechten (2π). Bezeichnen wir ferner diejenige Halbebene, welche sich mit I zu einer vollständigen Ebene vereinigt, durch I' (sind mit andern Worten I und I' entgegengesetzte Halbebenen), und

führt man in entsprechender Weise die Halbebenen II′ und III′ ein, so ist $(\mathrm{I\,II'}) = (\mathrm{I\,II}) \pm \pi$, $(\mathrm{II\,III'}) = (\mathrm{II\,III}) \pm \pi$ u. s. w.

3. Jedesmal, wenn durch die gemeinschaftliche Kante zweier Halbebenen I und II eine dritte Halbebene III gelegt wird, sagen wir, der Keil (I II) werde in die zwei Keile (I III) und (III II) zerlegt, und bezeichnen den Bruch $\sin(\mathrm{I\,III}) : \sin(\mathrm{III\,II})$ als das Schnittverhältnis der Teilung. Ersetzen wir die Halbebene III durch die entgegengesetzte Halbebene III′, so bleibt, weil $\sin(\mathrm{I\,III'}) = -\sin(\mathrm{I\,III})$, $\sin(\mathrm{III'\,II}) = -\sin(\mathrm{III\,II})$ ist, das Schnittverhältnis ungeändert. Das Schnittverhältnis ändert sich also nicht, wenn man die teilende Halbebene durch die entgegengesetzte Halbebene ersetzt. Wenn die teilende Halbebene entweder im Innern des Keiles selbst oder seines Scheitelkeiles liegt, so ist das Schnittverhältnis positiv; dagegen hat es einen negativen Wert, wenn die teilende Halbebene durch einen der beiden Nebenkeile hindurchgeht.

Fällt man von irgend einem Punkte der teilenden Ebene III die Senkrechten auf die beiden ersten Ebenen I und II, so ist das Schnittverhältnis der Teilung dem absoluten Betrage nach gleich dem Verhältnisse dieser Senkrechten. Es sei nämlich P irgend ein Punkt von III; von P sei auf I die Senkrechte PQ_1, auf II die Senkrechte PQ_2 und auf die Kante die Senkrechte PR gefällt. Dann stehen auch die Geraden RQ_1 und RQ_2 auf der Kante senkrecht; folglich ist der Winkel PRQ_1 gleich dem Neigungswinkel der Ebenen I und III, und PRQ_2 gleich dem der Ebenen II und III. Es verhält sich also

$$\frac{\sin(\mathrm{I\,III})}{\sin(\mathrm{III\,II})} = \pm\frac{PQ_1}{PQ_2}.$$

Da bei dieser Konstruktion nicht die Halbebenen selbst, sondern nur die Ebenen in Betracht kommen, brauchen die beiden Verhältnisse im Vorzeichen nicht übereinzustimmen.

4. Sind I, II, III, IV vier Halbebenen, welche dieselbe Kante besitzen, so bezeichnet man als das Doppelverhältnis (I II III IV) dieser vier Halbebenen den Quotienten aus den beiden Schnittverhältnissen:

$$(\mathrm{I\,II\,III\,IV}) = \frac{\sin(\mathrm{I\,III})}{\sin(\mathrm{III\,II})} : \frac{\sin(\mathrm{I\,IV})}{\sin(\mathrm{IV\,II})}.$$

Aus dieser Definition geht hervor, dafs man jede Halbebene mit der entgegengesetzten Halbebene vertauschen darf. Man spricht daher auch vom Doppelverhältnis von vier Ebenen. Ist MN die gemeinschaftliche Kante, und geht je eine der vier Ebenen der Reihe nach durch einen der Punkte A, B, C, D, so wendet man auch die Bezeichnung an: (MN : ABCD).

Den absoluten Betrag eines Doppelverhältnisses von vier Ebenen kann man auch in folgender Weise darstellen, bei der keine Winkel, sondern nur Strecken benutzt werden. Man fällt von einem beliebigen Punkte P der Ebene III die Senkrechten PP_1 und PP_2 auf die Ebenen I und II, und ebenso von einem beliebigen Punkte Q der Ebene IV die Senkrechten QQ_1 und QQ_2 auf dieselben Ebenen. Dann ist

$$(\mathrm{I\,II\,III\,IV}) = \pm \frac{PP_1}{PP_2} : \frac{QQ_1}{QQ_2}.$$

5. Durchschneidet man vier Ebenen eines Büschels durch eine beliebige Ebene, so ist das Doppelverhältnis der vier Ebenen gleich dem Doppelverhältnisse ihrer Schnittlinien mit der fünften Ebene.

Die vier Ebenen des Büschels seien I, II, III, IV. Die Ebene V soll weder durch die Kante g hindurchgehen, noch zu ihr parallel sein; sie trifft daher die vier ersten Ebenen in vier Geraden 1, 2, 3, 4 eines Büschels. Wir betrachten zunächst das Dreikant mit den Kanten 1, 3, g und den jedesmal gegenüberliegenden Flächen III, I, V. Hierin verhält sich

$$\frac{\sin(1\,3)}{\sin(\mathrm{I\,III})} = \frac{\sin(3\,g)}{\sin(\mathrm{I\,V})}.$$

In gleicher Weise führt die Betrachtung der Dreikante (2, 3, g), (1, 4, g) und (2, 4, g) der Reihe nach zu den Gleichungen:

$$\frac{\sin(2\,3)}{\sin(\mathrm{II\,III})} = \frac{\sin(3\,g)}{\sin(\mathrm{II\,V})}, \quad \frac{\sin(1\,4)}{\sin(\mathrm{I\,IV})} = \frac{\sin(4g)}{\sin(\mathrm{I\,V})},$$

$$\frac{\sin(2\,4)}{\sin(\mathrm{II\,IV})} = \frac{\sin(4\,g)}{\sin(\mathrm{II\,V})}.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen ergiebt sich durch Division:

$$\frac{\sin(1\,3)}{\sin(2\,3)} = \frac{\sin(\mathrm{I\,III})}{\sin(\mathrm{II\,III})} : \frac{\sin(\mathrm{I\,V})}{\sin(\mathrm{II\,V})};$$

ebenso folgt aus den beiden letzten:

$$\frac{\sin(1\,4)}{\sin(2\,4)} = \frac{\sin(\mathrm{I\,IV})}{\sin(\mathrm{II\,IV})} : \frac{\sin(\mathrm{I\,V})}{\sin(\mathrm{II\,V})}.$$

Es ist also bis auf das Vorzeichen

$$\frac{\sin(1\,3)}{\sin(2\,3)} : \frac{\sin(1\,4)}{\sin(2\,4)} = \frac{\sin(\mathrm{I\,III})}{\sin(\mathrm{II\,III})} : \frac{\sin(\mathrm{I\,IV})}{\sin(\mathrm{II\,IV})}.$$

Da zudem die Doppelverhältnisse (I II III IV) und (1 2 3 4) in ihrem Vorzeichen übereinstimmen, so sind sie gleich.

6. Durchschneidet man vier Ebenen eines Büschels durch eine beliebige Gerade, so ist das Doppelverhältnis der vier Schnittpunkte gleich dem der vier Ebenen.

Die Gerade t treffe die vier Ebenen I, II, III, IV der Reihe nach in den vier Punkten A, B, C, D. Durch die Gerade t und einen beliebigen Punkt der Kante legt man eine Ebene, durch welche aus den gegebenen Ebenen die Geraden 1, 2, 3, 4 ausgeschnitten werden. Dann ist, wie wir soeben bewiesen haben, (1234) = (I II III IV). Nach I § 1, 6 ist aber auch (1234) = (ABCD); also ist auch das Doppelverhältnis der vier Ebenen I, II, III, IV gleich dem der vier Punkte A, B, C, D.

7. Hiernach kann man, von vier Punkten A, B, C, D einer Geraden ausgehend, beliebig viele Quadrupel konstruieren, deren Doppelverhältnisse gleich dem der vier gegebenen Punkte sind. Man kann z. B. durch eine beliebige Gerade g, welche nicht mit der Geraden AB in einer Ebene liegt, vier Ebenen hindurchlegen, von denen je eine einen der gegebenen Punkte enthält. Diese Ebenen darf man wieder durch eine fünfte Ebene oder eine beliebige gerade Linie durchschneiden; man erhält dadurch vier Ebenen, vier Gerade und vier Punkte; das durch vier gleichartige Gebilde bestimmte Doppelverhältnis ist gleich dem der gegebenen Punkte.

8. Sind drei Punkte A, B, C in gerader Linie gegeben, so wird das Verhältnis AC : CB seinem absoluten Betrage nach auch erhalten, wenn man durch C eine beliebige Ebene legt und auf dieselbe von A und B aus die Senkrechten AA′ und BB′ fällt; abgesehen vom Vorzeichen ist das Verhältnis AC : CB auch gleich dem Quotienten AA′ : BB′.

Bei vier in gerader Linie liegenden Punkten A, B, C, D kann man durch die Punkte C und D zwei beliebige Ebenen

legen und von A und B auf die erste Ebene die Senkrechten AA′ und BB′, und auf die zweite die Senkrechten AA″ und BB″ fällen; dann ist das Doppelverhältnis

$$(ABCD) = \pm \frac{AA'}{BB'} : \frac{AA''}{BB''}.$$

Übungen.

1) Zwei beliebige Ebenen liegen harmonisch zu den beiden Ebenen, durch welche die von ihnen gebildeten Winkel halbiert werden.

2) Vier durch einen Punkt O gehende Strahlen a, b, c, d, von denen keine drei in einer Ebene liegen, bestimmen ein vollständiges Vierkant; indem man je zwei Kanten durch eine Ebene verbindet, erhält man die sechs Seiten des Vierkants; die Schnittlinie von je zwei gegenüberliegenden Seiten wird eine Diagonalkante genannt; das Vierkant hat drei Diagonalkanten.

a) Irgend zwei Diagonalkanten liegen harmonisch zu den Schnittlinien ihrer Verbindungsebene mit denjenigen beiden Seiten, welche durch die dritte Diagonalkante gehen.

b) Irgend zwei Kanten liegen harmonisch zu der in ihrer Verbindungsebene liegenden Diagonalkante und derjenigen Geraden, in welcher diese Ebene von der Verbindungsebene der beiden andern Diagonalkanten geschnitten wird.

3) Irgend vier Punkte einer Kugelfläche, von denen keine drei in einem Hauptkreise liegen, bestimmen ein vollständiges sphärisches Viereck; jeder Hauptkreis, der zwei dieser Punkte verbindet, heifst eine Seite, und jeder Schnittpunkt von zwei Gegenseiten ein Diagonalpunkt des Vierecks. Das Viereck hat sechs Seiten und sechs Diagonalpunkte; aber die letzteren ordnen sich zu drei Paaren von Gegenpunkten. Mit Hilfe der Übung 2) übertrage man die in I § 7 (S. 46) für das vollständige Viereck der Ebene bewiesenen Sätze auf die Kugel.

4) Irgend vier Hauptkreise einer Kugel, von denen keine drei durch denselben Punkt gehen, bilden ein vollständiges sphärisches Vierseit. Dasselbe enthält zwölf Eckpunkte, welche sechs Paare von Gegenpunkten bilden, und drei Diagonalen. Man beweise den Satz, dafs jede Diagonale eines vollständigen sphärischen Vierseits durch die andern beiden Diagonalen harmonisch geteilt wird.

5) a) In einer Geraden sind drei Punkte α, β, γ gegeben; wie hat man einen Punkt O zu wählen, damit der Winkel $\alpha O\beta$ durch $O\gamma$ halbiert wird?

b) Wie hat man die Gerade g zu wählen, damit der durch die Ebenen $(g\alpha)$ und $(g\beta)$ gebildete Winkel durch die Ebene $(g\gamma)$ halbiert wird?

6) a) Ein (ebener) Strahlenbüschel und ein Ebenenbüschel sind perspektiv auf einander bezogen, wenn der Mittelpunkt des ersten in der Axe des zweiten und jeder Strahl des ersten in der entsprechenden Ebene des zweiten liegt.

b) Der Ebenenbüschel mufs, wie der Strahlenbüschel und die Punktreihe (I S. 6), als ein einstufiges Elementargebilde betrachtet werden. Man ordne zwei beliebige derartige Gebilde einander perspektiv zu; speciell gebe man die Bedingungen an, unter denen zwei Ebenenbüschel einander perspektiv zugeordnet sind, oder unter denen ein Ebenenbüschel einer Punktreihe oder einem Strahlenbüschel perspektiv entspricht.

c) Man weise nach, dafs zwei perspektiv auf einander bezogene einstufige Gebilde einander auch projektiv entsprechen.

7) a) Auf der einen von zwei windschiefen Geraden sind vier Punkte α, β, γ, δ und auf der andern drei Punkte α', β', γ' gegeben; man soll auf der zweiten Geraden einen Punkt δ' derartig bestimmen, dafs die Doppelverhältnisse $(\alpha\beta\gamma\delta)$ und $(\alpha'\beta'\gamma'\delta')$ einander gleich sind.

(Durch einen beliebigen Punkt λ der Geraden $\alpha\alpha'$ lege man eine Gerade g, welche die geraden Linien $\beta\beta'$ und $\gamma\gamma'$ schneidet; der Schnittpunkt δ' der Ebene $(g\delta)$ mit der zweiten Geraden ist der gesuchte Punkt.)

b) Entsprechende Punkte in zwei projektiv auf einander bezogenen Punktreihen, deren Träger windschief zu einander liegen, können immer als Schnittpunkte derselben Ebene eines Büschels mit den Trägern angesehen werden.

c) Sind α, β, γ und α', β', γ' entsprechende Punkte in zwei projektiven Punktreihen, so kann jede Gerade, welche die drei Linien $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ und $\gamma\gamma'$ schneidet, als Axe eines Ebenenbüschels von der in b) angegebenen Eigenschaft genommen werden.

8) a) Durch die eine von zwei windschiefen Geraden gehen vier Ebenen A, B, C, D, durch die andere drei Ebenen A', B', C';

man soll durch die zweite Gerade eine Ebene D′ so legen, daſs die Doppelverhältnisse (ABCD) und (A′B′C′D′) einander gleich sind.

(Eine beliebige durch die Schnittlinie von A und A′ gelegene Ebene schneide die Schnittlinie (BB′) in β und die Schnittlinie (CC′) in γ; wenn jetzt die Gerade $\beta\gamma$ die Ebene D in δ trifft, so muſs die Ebene D′ durch δ gehen.)

b) Wenn zwei Ebenenbüschel, deren Axen windschief zu einander liegen, projektiv auf einander bezogen sind, so läſst sich stets eine gerade Linie so finden, daſs sie von je zwei entsprechenden Ebenen in demselben Punkte geschnitten wird.

c) Die in b) angegebene Eigenschaft haben unendlich viele gerade Linien in Bezug auf zwei gegebene projektive Ebenenbüschel.

§ 2.

Das Koordinaten-Tetraeder.

1. Wie eine Ebene den Raum in zwei Teile zerlegt und zwei einander schneidende Ebenen vier Raumteile gegen einander abgrenzen, ebenso führen drei Ebenen, welche drei in einem Punkte zusammenstoſsende Kanten besitzen, eine Zerlegung des Raumes in acht Teile herbei. Jede Kante zerfällt durch den gemeinschaftlichen Schnittpunkt in zwei entgegengesetzte Strahlen; es seien dies a und a′, b und b′, c und c′. Je drei vom Schnittpunkte ausgehende Strahlen, die verschiedenen Geraden angehören, bestimmen ein Dreikant; somit erhalten wir folgende acht Dreikante:

$$(a\,b\,c),\ (a'\,b\,c),\ (a\,b'\,c),\ (a\,b\,c'),\ (a\,b'\,c'),\ (a'\,b\,c'),$$
$$(a'\,b'\,c),\ (a'\,b'\,c').$$

Die gegenseitige Lage dieser acht Dreikante brauchen wir nicht zu erörtern; es genügt, daran zu erinnern, daſs jedes Dreikant ein Gegendreikant besitzt, dessen Kanten jedesmal die Verlängerungen der Kanten des ersteren bilden.

Jeder Punkt des Raumes, der nicht auf einer der gegebenen drei Ebenen liegt, gehört dem Innern eines unter diesen acht Dreikanten an.

2. Tritt eine vierte Ebene hinzu, welche mit jeder der drei Kanten einen Punkt gemein hat, ohne durch ihren gemeinschaftlichen Schnittpunkt hindurchzugehen, so kann sie nur jedesmal

einen der von diesem Punkte ausgehenden Strahlen treffen. Wir nehmen an, die vierte Ebene schnitte jeden der drei Strahlen a, b, c, hätte also mit den Strahlen a', b', c' keinen Punkt gemein. Dann wird das Dreikant (a' b' c') durch die vierte Ebene nicht zerlegt; dagegen tritt dieselbe in jedes der andern sieben Dreikante ein, führt also eine Teilung derselben herbei. Demnach zerlegen die vier Ebenen den Raum in fünfzehn Teile.

3. Ehe wir diese näher charakterisieren, beachten wir folgendes. Verbindet man zwei Punkte, die auf verschiedenen Schenkeln eines ebenen Winkels liegen, durch eine Strecke, so zerlegt diese das Winkelfeld in ein Dreieck und ein ungeschlossenes Dreiseit. So zerlegt sich in der Figur auf S. 9 T. I das Winkelfeld $O_{12}O_1O_{13}$ durch die Strecke O_2O_3 in das Dreieck $O_1O_2O_3$ und das ungeschlossene Dreiseit $O_{12}O_2O_3O_{13}$.

Zieht man aber innerhalb eines Winkelfeldes einen Strahl, der von einem Punkte des einen Schenkels ausgeht, ohne den andern Schenkel zu treffen, so zerfällt das Winkelfeld in ein Winkelfeld und ein ungeschlossenes Dreiseit. Wenn z. B. von dem Punkte D auf dem einen Schenkel AB des Winkels BAC ein Strahl DE in das Innere eintritt, ohne den Schenkel AC zu treffen, so zerfällt der Winkel BAC in den Winkel BDE und das ungeschlossene Dreiseit EDAC.

4. Gehen wir jetzt dazu über, die fünfzehn Teile zu charakterisieren, in welche der Raum durch die vier Ebenen zerlegt wird. Vom Dreikant (abc) werden die drei Kanten getroffen; daher wird jedes der drei Winkelfelder in ein Dreieck und ein ungeschlossenes Dreiseit zerlegt. Auf der vierten Ebene liegt im Innern des Dreikants (abc) ein endliches Dreieck. Das Dreikant wird also in einen endlichen, von lauter Dreiecken begrenzten Teil, ein Tetraeder, und einen unendlichen Teil zerlegt. Der letztere wird von einem in der vierten Ebene gelegenen Dreieck und drei ungeschlossenen Dreiseiten (die auf den drei andern Ebenen liegen) begrenzt.

Was die Zerlegung des Dreikantes (a'bc) betrifft, so werden die Kanten b und c durch die vierte Ebene getroffen, die Kante a' aber nicht. Der innerhalb dieses Dreikants gelegene Teil der vierten Ebene bildet ein ungeschlossenes Dreiseit, von welchem ein Eckpunkt in der Kante b und einer in der Kante c liegt.

Das Winkelfeld (bc) zerlegt sich in ein Dreieck und ein ungeschlossenes Dreiseit. Dagegen zerfällt sowohl das Winkelfeld (a'b) wie das Winkelfeld (a'c) in ein ungeschlossenes Dreiseit und ein Winkelfeld. Der eine Raumteil wird von einem endlichen, in (bc) gelegenen Dreieck und drei ungeschlossenen Dreiseiten begrenzt. Der andere Raumteil hat zur Begrenzung zwei Winkelfelder und zwei ungeschlossene Dreiseite; erstere liegen in den Ebenen (a'b) und (a'c); von den Dreiseiten liegt das eine in der Ebene (bc), das andere in der vierten Ebene.

Dieselbe Teilung wird bei den Dreikanten (ab'c) und (abc') herbeigeführt.

Von den Kanten des Dreikants (ab'c') wird nur die Kante a durch die vierte Ebene getroffen und in eine Strecke und einen Strahl zerlegt. Derjenige Teil der vierten Ebene, der im Innern dieses Dreikants liegt, bildet ein Winkelfeld. Jedes der Winkelfelder (ab') und (ac') wird in ein ungeschlossenes Dreiseit und ein neues Winkelfeld zerlegt, während das Feld (b'c') keine Teilung erleidet. Der eine von den Teilen, in welche das Dreikant (ab'c') durch die vierte Ebene zerlegt wird, wird von zwei ungeschlossenen Dreiseiten und zwei Winkelfeldern, der andere von drei Winkelfeldern begrenzt; der letztere ist wiederum ein Dreikant.

Auch die Dreikante (a'bc') und (a'b'c) werden in gleicher Weise zerlegt.

5. Zu demselben Ergebnisse gelangen wir auch, wenn wir direkt von den vier Ebenen ausgehen und nach den Gebilden fragen, welche der einzelne Raumteil mit dem durch die Ebenen begrenzten Tetraeder gemeinschaftlich hat.

Wir erkennen nämlich sofort, dafs ein Raumteil, der von den vier Ebenen des Tetraeders begrenzt wird und auf seiner Grenze zwei von den Dreiecken enthält, welche der Oberfläche des Tetraeders angehören, mit dem Innern desselben identisch wird. Überhaupt kann einer von den Teilen, in welche der Raum durch die vier Ebenen zerlegt wird, falls er vom Innern des Tetraeders verschieden sein soll, mit der Begrenzung desselben entweder eine Fläche (ein Dreieck) oder eine Kante oder einen Punkt (einen Eckpunkt) gemeinschaftlich haben; es giebt aber keinen Raumteil, der nicht wenigstens in einem Punkte an das Tetraeder herantritt.

Wir nennen O_1, O_2, O_3, O_4 die Eckpunkte des Tetraeders und bezeichnen mit O_{12} einen Punkt der Geraden O_1O_2, der in der Verlängerung über O_2 hinaus liegt. In entsprechender Weise mögen die Punkte O_{21}, O_{13}, O_{31} u. s. w. eingeführt werden.

Soll jetzt ein Teil des Raumes das Dreieck $O_2O_3O_4$ zur Grenze haben, ohne mit dem Innern des Tetraeders identisch zu sein, so müssen die Verlängerungen der drei andern Kanten über O_2, O_3, O_4 hinaus, also die Strahlen O_2O_{12}, O_3O_{13}, O_4O_{14} auf seiner Grenze liegen. Dieser Raumteil wird von dem endlichen Dreieck $O_2O_3O_4$ und drei ungeschlossenen Dreiseiten begrenzt. Solcher Teile giebt es vier; jeder wird erhalten, wenn man von einem durch drei zusammenstoßende Kanten des Tetraeders gebildeten Dreikant das Innere des Tetraeders hinwegnimmt.

Wir fragen jetzt nach denjenigen Raumteilen, welche mit dem Tetraeder in einer Kante zusammenstoßen. Soll ein Raumteil auf seiner Grenze die Strecke O_1O_2 haben, so müssen die Verlängerungen der von den Punkten O_1 und O_2 ausgehenden andern Kanten der Grenze angehören, also die vier Strahlen O_1O_{31}, O_1O_{41}, O_2O_{32}, O_2O_{42}. Die Grenze besteht aus den beiden Winkelfeldern $O_{31}O_1O_{41}$ und $O_{32}O_2O_{42}$, sowie aus zwei ungeschlossenen Dreiseiten, nämlich $O_{31}O_1O_2O_{32}$ u. $O_{41}O_1O_2O_{42}$. Den sechs Kanten des Tetraeders entsprechend giebt es sechs derartige Raumteile.

Wenn endlich ein Raumteil nur in einem Eckpunkte mit dem Tetraeder zusammenstößt, so liegen an seiner Grenze die Verlängerungen der von diesem Eckpunkte ausgehenden Kanten. Jeder derartige Raumteil besteht aus dem Innern eines Dreikants, des Gegendreikants zu demjenigen, welches die von demselben Eckpunkte ausgehenden Kanten des Tetraeders bilden.

6. Hiernach können die 15 Teile, in welche der Raum durch die gegebenen vier Ebenen zerlegt wird, in folgender Weise charakterisiert werden.

I. Das Innere des Tetraeders $O_1O_2O_3O_4$.

II.—V. Vier Raumteile, von denen jeder in einem Dreieck mit dem Tetraeder zusammenstößt. Der Teil II hat die drei Ecken O_2, O_3, O_4, drei endliche Kanten O_3O_4, O_4O_2, O_2O_3, und drei unendliche Kanten O_2O_{12}, O_3O_{13}, O_4O_{14}, sowie eine endliche Grenzfläche $O_2O_3O_4$ und drei unendliche $O_{12}O_2O_3O_{13}$,

$O_{13}O_3O_4O_{14}$, $O_{14}O_4O_2O_{12}$. In entsprechender Weise hat der Raumteil III mit dem Tetraeder die Fläche $O_1O_3O_4$, IV die Fläche $O_1O_2O_3$ und V die Fläche $O_1O_2O_3$ gemeinschaftlich.

VI.—XI. Sechs Teile, von denen jeder mit dem Tetraeder nur eine Kante gemeinschaftlich hat. Der Teil VI hat die Ecken O_1 und O_2, eine endliche und vier unendliche Kanten; die letzteren sind O_1O_{31}, O_1O_{41}, O_2O_{32}, O_2O_{42}; seine Grenze besteht aus zwei Winkelfeldern und zwei ungeschlossenen Dreiseiten. In entsprechender Weise liegen die Raumteile VII, VIII, IX, X, XI der Reihe nach an den Kanten O_1O_3, O_1O_4, O_2O_3, O_2O_4, O_3O_4.

XII.—XV. Vier Raumteile, von denen jeder nur in einem Eckpunkte an das Tetraeder anstöfst. Der Raumteil XII ist das Innere des Dreikants $(O_1 : O_{21}O_{31}O_{41})$. Ebenso hat das Dreikant XIII seinen Scheitel in O_2, das Dreikant XIV in O_3 und das Dreikant XV in O_4.

7. Die Senkrechten, welche von einem Punkte P auf die vier Ebenen des Tetraeders $O_1O_2O_3O_4$ gefällt werden können, mögen mit p_1, p_2, p_3, p_4 bezeichnet werden, und zwar soll p_1 auf der Ebene $O_2O_3O_4$, p_2 auf der Ebene $O_1O_3O_4$, p_3 auf der Ebene $O_1O_2O_4$ und p_4 auf der Ebene $O_1O_2O_3$ senkrecht stehen. Da wir die vier Senkrechten benutzen wollen, um die Lage der Punkte des Raumes zu bestimmen, so soll das zu Grunde gelegte Tetraeder das Koordinaten-Tetraeder heifsen. Jede der vier Senkrechten wird mit dem Zeichen + oder — versehen, jenachdem sie auf der einen oder andern Seite der zugehörigen Ebene liegt, und zwar soll die Wahl der Vorzeichen so getroffen werden, dafs die vier Senkrechten das positive Vorzeichen haben, wenn der Punkt P im Innern des Tetraeders liegt.

Hiernach gelten für die 15 Teile folgende Vorzeichen:

	p_1	p_2	p_3	p_4
I	+	+	+	+
II	—	+	+	+
III	+	—	+	+
IV	+	+	—	+
V	+	+	+	—
VI	+	+	—	—
VII	+	—	+	—

	p_1	p_2	p_3	p_4
VIII	+	−	−	+
IX	−	+	+	−
X	−	+	−	+
XI	−	−	+	+
XII	+	−	−	−
XIII	−	+	−	−
XIV	−	−	+	−
XV	−	−	−	+.

8. Die vier Höhen des Tetraeders mögen mit h_1, h_2, h_3, h_4, die vier Grundflächen mit $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, $\triangle_4$ bezeichnet werden. Liegt der Punkt P im Innern des Tetraeders, so kann man dasselbe in vier Tetraeder zerlegen, von denen jedes eine Seite des Tetraeders zur Grundfläche und den Punkt P zur Spitze hat. Der Inhalt Π des gegebenen Tetraeders ist gleich der Summe dieser vier Teile; es besteht also die Gleichung:

$$\triangle_1 p_1 + \triangle_2 p_2 + \triangle_3 p_3 \triangle_4 p_4 = 3\Pi.$$

Da aber $3\Pi = \triangle_1 h_1 = \triangle_2 h_2 = \triangle_3 h_3 = \triangle_4 h_4$ ist, so zeigt sich, daſs zwischen den vier Senkrechten $p_1 \ldots p_4$ die Relation besteht:

$$(1) \quad \frac{p_1}{h_1} + \frac{p_2}{h_2} + \frac{p_3}{h_3} + \frac{p_4}{h_4} = 1.$$

Will man bei einer andern Lage des Punktes P das gegebene Tetraeder aus den vier Pyramiden zusammensetzen, von denen jede eine Seite des Tetraeders zur Grundfläche und den Punkt P zur Spitze hat, so muſs man von der Summe derjenigen Pyramiden, deren Spitze der Grundfläche gegenüber in demselben Halbraume mit dem Tetraeder liegt, diejenigen abziehen, deren Spitzen im entgegengesetzten Halbraume der Grundfläche gegenüber liegen. Für die ersteren ist aber die Senkrechte positiv, für die letzteren negativ. Indem man in den einzelnen Produkten die Senkrechten mit ihren Vorzeichen versieht, hat man die algebraische Summe der vier Produkte zu bilden. Die Formel (1) gilt also für jede Lage des Punktes P.

Übungen:

1) a) Für die Punkte der Kante $O_1 O_2$ sind p_3 und p_4 gleich null; man gebe die Vorzeichen an, welche die beiden andern

Senkrechten p_1 und p_2 für die Punkte auf den drei Teilen erhalten, in welche diese Kante durch die Punkte O_1 und O_2 zerlegt wird.

b) Man löse die entsprechende Aufgabe für jede andere Kante des Tetraeders.

2) a) Für die Punkte der Ebene $O_1O_2O_3$ ist $p_4 = 0$. Diese Ebene wird durch die in ihr gelegenen Kanten des Tetraeders in sieben Teile zerlegt; man gebe die Vorzeichen an, welche die Senkrechten p_1, p_2, p_3 für die Punkte in jedem dieser sieben Teile haben.

b) Man stelle die entsprechende Untersuchung für die übrigen Ebenen des Tetraeders an.

3) Welche von den vier Senkrechten p_1, p_2, p_3, p_4 ändern ihr Vorzeichen beim geradlinigen Durchgange

a) durch die Ebene $O_1O_2O_3$,
b) durch die Ebene $O_2O_3O_4$,
c) durch die Kante O_1O_2,
d) durch die Kante O_1O_3,
e) durch die Kante O_2O_3,
f) durch die Kante O_3O_4,
g) durch den Punkt O_1,
h) durch den Punkt O_4?

4) a) Für welchen Punkt ist $p_1 = p_2 = p_3 = p_4$?
b) Für welchen Punkt ist $p_1 = p_2 = p_3 = -p_4$?
c) Für welchen Punkt ist $p_2 = p_3 = p_4 = -p_1$?
d) Für welchen Punkt ist $p_1 = p_2 = -p_3 = -p_4$?

§ 3.

Die Geraden und die Ebenen des Raumes.

1. Der Punkt, von dem aus die Senkrechten $p_1 \ldots p_4$ auf die vier Koordinatenebenen gefällt werden können, soll kurz als Punkt (p_1, p_2, p_3, p_4) oder als Punkt (p) bezeichnet werden. Sind 0, 1, 2 drei Punkte einer geraden Linie, so liegen bekanntlich auch die Fufspunkte der Senkrechten, die man von ihnen aus auf eine Ebene fällt, in gerader Linie. Daher gilt auch für diese drei Senkrechten der in I § 3, 1 (S. 13) bewiesene Satz. Sind also $p_1 \ldots p_4$ die Senkrechten des Punktes 0; $p_1' \ldots p_4'$ die des

Punktes 1; $p_1'' \ldots p_4''$ die des Punktes 2, so bestehen die Gleichungen:

$$(1)\quad \begin{aligned} p_1 &= (1+\varrho)\,p_1' - \varrho p_1'' \\ p_2 &= (1+\varrho)\,p_2' - \varrho p_2'' \\ p_3 &= (1+\varrho)\,p_3' - \varrho p_3'' \\ p_4 &= (1+\varrho)\,p_4' - \varrho p_4'', \end{aligned}$$

wo ϱ das Verhältnis angiebt, nach welchem die Strecke 02 im Punkte 1 geteilt wird und wo wieder $\frac{-\varrho}{1+\varrho} = \frac{10}{02}$ ist.

2. Sind drei Punkte $(a_1 \ldots a_4)$, $(b_1 \ldots b_4)$, $(c_1 \ldots c_4)$ gegeben, die nicht in einer geraden Linie liegen, so verbinde man einen beliebigen Punkt $(p_1 \ldots p_4)$ in der durch die drei Punkte bestimmten Ebene mit dem Punkte (a) durch eine gerade Linie und bestimme den Schnittpunkt $(d_1 \ldots d_4)$ dieser Geraden mit der Verbindungslinie der Punkte (b) und (c). Da die Punkte (b), (c), (d) in gerader Linie liegen, so bestehen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} d_1 &= (1+\varrho)\,b_1 - \varrho c_1 \\ d_2 &= (1+\varrho)\,b_2 - \varrho c_2 \\ d_3 &= (1+\varrho)\,b_3 - \varrho c_3 \\ d_4 &= (1+\varrho)\,b_4 - \varrho c_4, \end{aligned}$$

wo ϱ das Schnittverhältnis ist, nach welchem die Strecke (dc) im Punkte (b) geteilt wird. Auch die Punkte (a), (d), (p) gehören einer geraden Linie an; daher mufs auch sein:

$$\begin{aligned} p_1 &= (1+\sigma)\,d_1 - \sigma a_1 \\ p_2 &= (1+\sigma)\,d_2 - \sigma a_2 \\ p_3 &= (1+\sigma)\,d_3 - \sigma a_3 \\ p_4 &= (1+\sigma)\,d_4 - \sigma a_4, \end{aligned}$$

wo die von den Punkten (p) und (a) begrenzte Strecke im Punkte (d) nach dem Verhältnisse σ geteilt wird. Indem man jetzt setzt:

$$(1+\varrho)(1+\sigma) = \mu, \quad -\varrho(1+\sigma) = \nu, \quad -\sigma = \lambda,$$

gehen hieraus die Gleichungen hervor:

$$(3)\quad \begin{aligned} p_1 &= \lambda a_1 + \mu b_1 + \nu c_1 \\ p_2 &= \lambda a_2 + \mu b_2 + \nu c_2 \\ p_3 &= \lambda a_3 + \mu b_3 + \nu c_3 \\ p_4 &= \lambda a_4 + \mu b_4 + \nu c_4. \end{aligned}$$

4. Für einige spätere Untersuchungen ist es von Wichtigkeit, die geometrische Bedeutung der Koefficienten λ, μ, ν anzugeben.

Zu dem Ende wollen wir die Punkte (a), (b), (c), (d), (p) mit A, B, C, D, P der Reihe nach bezeichnen; dann ist

$$\lambda = -\sigma = -\frac{PD}{DA} = \frac{PD}{AD}.$$

Wir bezeichnen noch die von P auf die Geraden BC, CA und AB gefällten Senkrechten mit q_1, q_2, q_3 und die Höhen des Dreiecks ABC mit η_1, η_2, η_3. Dann folgt:

$$(4) \quad \lambda = \frac{PD}{AD} = \frac{q_1}{\eta_1}.$$

Nun würde man doch in den Gleichungen (3) zu denselben Koefficienten λ, μ, ν gelangt sein, wenn man statt der Hilfslinie AP die Hilfslinie BP oder CP gezogen hätte. Statt daher den Wert von μ und ν vermittelst der bekannten Werte von ϱ und σ herzuleiten, kann man aus der Gleichung (4) unmittelbar schliefsen, dafs ist:

$$(5) \quad \mu = \frac{q_2}{\eta_2}, \quad \nu = \frac{q_3}{\eta_3}.$$

Aus den obigen Gleichungen folgt, dafs $\lambda + \mu + \nu = 1$ ist; diese Gleichung ergiebt sich auch aus den Werten (4) und (5).

4. Die Gleichungen (3) können als homogen lineare Gleichungen zwischen den vier Gröfsen -1, λ, μ, ν betrachtet werden. Diese sind nur dann mit einander vereinbar, wenn die aus den Koefficienten dieser Gröfsen gebildete Determinante verschwindet. Damit also der Punkt (p) mit den Punkten (a), (b), (c) in einer Ebene liegt, mufs die Gleichung erfüllt sein:

$$(6) \quad \begin{vmatrix} p_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ p_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ p_3 & a_3 & b_3 & c_3 \\ p_4 & a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Wir nennen diese Bedingung die Gleichung der durch die Punkte (a), (b), (c) gelegten Ebene; wie wir sehen, ist sie homogen linear in den Senkrechten $p_1 \ldots p_4$.

5. Um diese Gleichung in einer zweiten Weise herzuleiten, gehen wir entsprechend der in I § 3, 3 (S. 14) durchgeführten Betrachtung von drei Ebenen 1, 2, 0 aus, die sich in einer geraden Linie schneiden. Von einem beliebigen Punkte M des Raumes fällen wir die Senkrechten auf diese drei Ebenen und auf die gemeinschaftliche Schnittlinie; die ersten seien MN_1, MN_2, MN_0, die

letzte sei MC. Dann stehen auch die Geraden CN_0, CN_1, CN_2 auf der Kante senkrecht. Diese drei Linien liegen also in der Ebene, welche im Punkte C auf der Kante senkrecht steht. Daher dürfen wir den in I § 3, 4 bewiesenen Satz auf unsere Figur anwenden und erhalten, wenn wir mit m_1, m_2, m_3 die vom Punkte M auf die drei Ebenen 1, 2, 0 gefällten Senkrechten und mit (12), (20), (01) die Neigungswinkel von je zwei dieser Ebenen bezeichnen, die Gleichung:

$$(7) \quad m_0 \sin(12) + m_1 \sin(20) + m_2 \sin(01) = 0$$

oder

$$(8) \quad m_0 = \varrho m_1 + \sigma m_2,$$

wenn ist

$$\varrho = -\frac{\sin(02)}{\sin(21)}, \quad \sigma = -\frac{\sin(01)}{\sin(12)}, \quad \frac{\sigma}{\varrho} = \frac{\sin(10)}{\sin(02)}.$$

In der Gleichung (8) ändern sich die Koefficienten ϱ und σ nicht, wenn man den Punkt M durch irgend einen andern Punkt des Raumes ersetzt.

6. Die Koordinatenebenen $O_2O_3O_4$, $O_1O_3O_4$, $O_1O_2O_4$ und $O_1O_2O_3$ mögen der Reihe nach kurz durch I, II, III, IV bezeichnet werden. Ist V eine beliebige Ebene, so möge sie die Ebene IV in der Geraden (IV V) schneiden. Durch (IV V) und den Punkt O_4 lege man eine neue Ebene VI. Diese schneidet die Ebene III in einer vom Punkte O_4 ausgehenden Geraden (III VI). Durch diese Gerade und den Punkt O_3 läfst sich eine neue Ebene VII hindurchlegen. Von einem beliebigen Punkte P des Raumes fällen wir auf die sieben Ebenen Senkrechte und fügen, um dieselben nach Gröfse und Richtung zu bezeichnen, an das Zeichen p die der Ebene entsprechende Marke aus der Reihe 1 . . . 7 an, so dafs p_1 die auf die Ebene I, . . . p_7 die auf die Ebene VII gefällte Senkrechte angiebt. Da die Ebene VII durch die Punkte O_3 und O_4 und somit durch die Kante der Ebenen I und II hindurchgeht, so gilt nach (8) die Gleichung:

$$p_7 = \alpha p_1 + \beta p_2.$$

Ebenso haben die Ebenen VI, VII und III eine gemeinschaftliche Kante; daher mufs sein:

$$p_6 = \gamma p_7 + \delta p_3;$$

und da auch die Ebenen V, VI und IV einem Büschel angehören, folgt:

$$p_5 = \varepsilon p_6 + \zeta p_4.$$

Daraus ergiebt sich:

$$p_5 = \alpha\gamma\varepsilon p_1 + \beta\gamma\varepsilon p_2 + \delta\varepsilon p_3 + \zeta p_4.$$

Hier schreiben wir q statt p_5, a_1 statt $\alpha\gamma\varepsilon$, a_2 statt $\beta\gamma\varepsilon$, a_3 statt $\delta\varepsilon$ und a_4 statt ζ. Dann erhalten wir als Wert der vom Punkte P $(= p_1 \ldots p_4)$ auf die Ebene V gefällten Senkrechten:

$$(9) \quad q = a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + a_4 p_4,$$

wo die Koefficienten a_1, a_2, a_3, a_4 nur von den vorher benutzten Koefficienten $\alpha \ldots \zeta$ und somit nur von der Lage der Ebene V zu den Ebenen I, II, III, IV abhangen. Die Koefficienten $a_1 \ldots a_4$ ändern sich also nicht, wenn man den Punkt P durch irgend einen andern Punkt des Raumes ersetzt.

7. Die Unabhängigkeit dieser Koefficienten von der Wahl des Punktes P benutzen wir, um die geometrische Bedeutung derselben zu finden. Wenn wir den Punkt P mit dem Punkte O_1 zusammenfallen lassen, werden $p_2 = p_3 = p_4 = 0$; p_1 geht in die vom Punkte O_1 ausgehende Höhe h_1 des Tetraeders und q in die Senkrechte über, welche von O_1 aut die Ebene V gefällt ist. Indem wir diese Senkrechte gleich r_1 setzen, nimmt die Gleichung (9) bei dieser Lage von P die Gestalt an: $r_1 = a_1 h_1$. Wir nennen in gleicher Weise die von den Eckpunkten O_2, O_3, O_4 ausgehenden Höhen des Tetraeders h_2, h_3, h_4 und bezeichnen die von diesen drei Punkten auf die Ebene V gefällten Senkrechten der Reihe nach mit r_2, r_3, r_4. Dann gelangen wir dadurch, dafs wir den Punkt P erst mit O_2, dann mit O_3 und endlich mit O_4 zusammenfallen lassen, zu den Gleichungen:

$$r_2 = a_2 h_2, \quad r_3 = a_3 h_3, \quad r_4 = a_4 h_4.$$

Wir können hieraus die Koefficienten a_1, a_2, a_3, a_4 vermittelst der Gröfsen r_1, r_2, r_3, r_4 ausdrücken und demnach die Gleichung (9) durch die folgende ersetzen:

$$(10) \quad q = \frac{r_1}{h_1} p_1 + \frac{r_2}{h_2} p_2 + \frac{r_3}{h_3} p_3 + \frac{r_4}{h_4} p_4,$$

wo r_1, r_2, r_3, r_4 die Senkrechten angeben, welche von den Punkten O_1, O_2, O_3, O_4 auf die Ebene gefällt sind, während q den senkrechten Abstand des Punktes $(p_1 \ldots p_4)$ von dieser Ebene darstellt.

8. Soll der Punkt P in der Ebene V liegen, so mufs $q = 0$ sein. Die Bedingung dafür, dafs der Punkt $(p_1 \ldots p_4)$ dieser Ebene angehört, kann also im Anschlufs an (9) durch die Gleichung

$$(11)\quad a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + a_4 p_4 = 0$$

oder im Anschluſs an (10) durch die Gleichung

$$(12)\quad \frac{r_1}{h_1} p_1 + \frac{r_2}{h_2} p_2 + \frac{r_3}{h_3} p_3 + \frac{r_4}{h_4} p_4 = 0$$

ausgedrückt werden.

9. Ein zweites Koordinatensystem möge durch die vier Ebenen I′, II′, III′, IV′ gegeben sein. Wir nennen q_1, q_2, q_3, q_4 die Senkrechten, welche vom Punkte $(p_1 \ldots p_4)$ der Reihe nach auf diese Ebenen gefällt werden können. Diese neuen Senkrechten können, wie die Gleichung (9) lehrt, unter Benutzung von sechzehn konstanten Gröſsen

$$\begin{matrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{14} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{41} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{44} \end{matrix}$$

in folgender Weise ausgedrückt werden:

$$(13)\quad \begin{aligned} q_1 &= a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13}p_3 + a_{14}p_4 \\ q_2 &= a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23}p_3 + a_{24}p_4 \\ q_3 &= a_{31}p_1 + a_{32}p_2 + a_{33}p_3 + a_{34}p_4 \\ q_4 &= a_{41}p_1 + a_{42}p_2 + a_{43}p_3 + a_{44}p_4. \end{aligned}$$

Die vier Konstanten a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14} hangen ab von den vier Senkrechten, welche von den Punkten A_1, A_2, A_3, A_4 auf die Ebene I′ gefällt werden können. Wir wollen diese Senkrechten der Reihe nach mit r_{11}, r_{12}, r_{13}, r_{14} bezeichnen. Ebenso mögen von den vier Punkten $O_1 \ldots O_4$ auf die Ebene II′ die Senkrechten $r_{21} \ldots r_{24}$, auf III′ die Senkrechten $r_{31} \ldots r_{34}$ und auf IV′ die Senkrechten $r_{41} \ldots r_{44}$ gefällt werden. Hiernach gehen die Gleichungen (13) in die folgenden über:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{r_{11}}{h_1} p_1 + \frac{r_{12}}{h_2} p_2 + \frac{r_{13}}{h_3} p_3 + \frac{r_{14}}{h_4} p_4 \\ q_2 &= \frac{r_{21}}{h_1} p_1 + \frac{r_{22}}{h_2} p_2 + \frac{r_{23}}{h_3} p_3 + \frac{r_{24}}{h_4} p_4 \\ q_3 &= \frac{r_{31}}{h_1} p_1 + \frac{r_{32}}{h_2} p_2 + \frac{r_{33}}{h_3} p_3 + \frac{r_{34}}{h_4} p_4 \\ q_4 &= \frac{r_{41}}{h_1} p_1 + \frac{r_{42}}{h_2} p_2 + \frac{r_{43}}{h_3} p_3 + \frac{r_{44}}{h_4} p_4. \end{aligned}$$

Übungen:

1) Von einem Punkte sind die Senkrechten ($p_1' \ldots p_4'$), von einem zweiten die Senkrechten ($p_1'' \ldots p_4''$) auf die Ebenen des Koordinatentetraeders gefällt; wie groſs sind die Senkrechten, welche von der Mitte ihrer Verbindungsstrecke auf dieselben Ebenen gefällt werden können?

2) Welche Werte haben die Senkrechten auf die Koordinatenebenen für folgende Punkte:

a) für die Mitten M_{12}, $M_{13} \ldots M_{34}$ der sechs Kanten O_1O_2, $O_1O_3 \ldots O_3O_4$?

b) für den Punkt, in welchem die Verbindungsstrecke der Punkte M_{34} und O_2 nach dem Verhältnisse 2 : 1 geteilt wird?

c) für den Schwerpunkt T_1 des Dreiecks $O_2O_3O_4$?

d) für den Punkt S, in welchem die Verbindungsstrecke des Eckpunktes O_1 mit dem Schwerpunkt T_1 des Dreiecks $O_2O_3O_4$ so geteilt wird, daſs $O_1S = 3ST_1$ ist?

e) für den Punkt, in welchem die Verbindungsstrecke von O_2 mit dem Schwerpunkte des Dreiecks $O_1O_3O_4$ nach dem Verhältnis 3 : 1 geteilt wird?

f) für die Mitte der Verbindungsstrecke $M_{12}M_{34}$ (Üb. a)?

g) für die Mitte der Strecke $M_{13}M_{24}$?

h) Welche Lehrsätze ergeben sich aus den in d)–g) gefundenen Werten?

3) Zu dem Tetraeder $O_1O_2O_3O_4$ nehme man ein Tetraeder $A_1A_2A_3A_4$ hinzu. Von A_1 seien auf die Seiten des ersten Tetraeders die Senkrechten $p_1' \ldots p_4'$, von A_2 die Senkrechten $p_1'' \ldots p_4''$, von A_3 desgleichen $p_1''' \ldots p_4'''$ und von A_4 endlich $p_1'''' \ldots p_4''''$ gefällt. Jetzt bestimme man diejenigen Punkte, welche für das Tetraeder $A_1A_2A_3A_4$ den in 2) a)—g) angegebenen Punkten entsprechen, und gebe die Gröſse der Senkrechten an, welche von diesen Punkten auf die Ebenen des Tetraeders $O_1O_2O_3O_4$ gefällt werden können.

4) Welche Beziehung findet statt zwischen den Senkrechten p_1, p_2, p_3, p_4, welche von einem beliebigen Punkte

a) der Halbierungsebene des von den Ebenen $O_1O_3O_4$ und $O_2O_3O_4$ gebildeten Keiles,

b) der Halbierungslinie des Nebenkeiles von ($O_1O_3O_4$, $O_2O_3O_4$),

c) der Halbierungsebene des Keiles $(O_1O_2O_3, O_2O_3O_4)$,

d) der Halbierungsebene des Nebenkeiles von

$$(O_1O_2O_3, O_2O_3O_4)$$

auf die Ebenen des Tetraeders gefällt werden können?

5) Der Keil zweier Ebenen möge durch Nebeneinanderstellung der Ebenen, der Nebenkeil durch Anhängung eines obern Striches bezeichnet werden. Jedesmal sollen die drei zusammengestellten Keile halbiert, von dem Schnittpunkte ihrer Halbierungsebenen die Senkrechten auf die Ebenen des Tetraeders gefällt und die Beziehungen ermittelt werden, welche zwischen diesen Senkrechten bestehen:

a) $(O_1O_3O_4, O_2O_3O_4)$, $(O_1O_2O_4, O_2O_3O_4)$, $(O_1O_2O_3, O_2O_3O_4)$;

b) $(O_1O_3O_4, O_2O_3O_4)$, $(O_1O_2O_4, O_2O_3O_4)$, $(O_1O_2O_3, O_2O_3O_4)'$;

c) $(O_1O_3O_4, O_2O_3O_4)$, $(O_1O_2O_3, O_2O_3O_4)'$, $(O_1O_2O_3, O_2O_3O_4)'$;

d) $(O_1O_3O_4, O_2O_3O_4)'$, $(O_1O_2O_3, O_2O_3O_4)'$, $(O_1O_2O_3, O_2O_3O_4)'$.

6) Man bestimme die Gröfse der Senkrechten p_1, p_2, p_3, p_4 für denjenigen Punkt, für den

a) $p_1 = p_2 = p_3 = p_4$,

b) $p_1 = p_2 = p_3 = -p_4$,

c) $p_1 = p_2 = -p_3 = p_4$,

d) $p_1 = -p_2 = p_3 = p_4$,

e) $p_1 = p_2 = -p_3 = -p_4$,

f) $p_1 = -p_2 = p_3 = -p_4$ ist.

g) Durch jeden der in a)—f) angegebenen Punkte und je eine Kante des Tetraeders lege man eine Ebene und gebe eine charakteristische Eigenschaft dieser Ebenen an.

h) Man leite hieraus Lehrsätze her über den Schnitt von je sechs Ebenen.

7) Es sei ι, $\varkappa$, λ, μ eine Permutation der vier Marken 1, 2, 3, 4; die Kante $O_\iota O_\varkappa$ werde von der Halbierungsebene des an der Kante $O_\lambda O_\mu$ gelegenen Nebenwinkels im Punkte $N_{\iota\varkappa}$ getroffen.

a) Man bestimme die Senkrechten, welche von jedem der

sechs Punkte N_{12}, N_{13}, N_{14}, N_{23}, N_{24}, N_{34} auf die Ebenen des Tetraeders gefällt werden können.

b) Man zeige, dafs diese sechs Punkte in der Ebene

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0$$

liegen.

c) Man leite hieraus einen Lehrsatz her.

§ 4.

Die von den Ecken des Tetraeders auf eine Ebene gefällten Senkrechten.

1. Wenn eine Ebene in das Innere des Tetraeders $O_1O_2O_3O_4$ eintritt, so müssen auch einige von den vier begrenzenden Dreiecken $O_2O_3O_4$, $O_1O_3O_4$, $O_1O_2O_4$, $O_1O_2O_3$ getroffen werden. Wird etwa das Dreieck $O_1O_2O_3$ durch die Ebene zerlegt, so werden, abgesehen von dem Falle, dafs die Ebene durch einen Eckpunkt hindurchgeht, zwei der Kanten O_2O_3, O_3O_1 und O_1O_2 zwischen ihren Endpunkten geschnitten. Es seien dies die Kanten O_1O_2 und O_1O_3. Dann tritt die Ebene auch in die Dreiecke $O_1O_2O_4$ und $O_1O_3O_4$ ein; sie schneidet daher je noch eine Kante in jedem dieser beiden Dreiecke. Das kann einmal die gemeinschaftliche Kante O_1O_4 sein, und dann giebt es keine weitere Kante, welche von der Ebene getroffen wird. Es können aber auch noch die Strecken O_2O_4 und O_3O_4 zwischen ihren Schnittpunkten geschnitten werden; diese bilden mit den beiden Kanten O_1O_2 und O_1O_3 zwei Paare von Gegenkanten. Daraus ergiebt sich der Satz:

Wenn eine Ebene ein Tetraeder zerlegt, ohne einen seiner Eckpunkte zu enthalten, so geht sie entweder durch drei von demselben Eckpunkte ausgehende Kanten oder durch zwei Paare von Gegenkanten hindurch.

Für die Lage einer Ebene zu dem Tetraeder $O_1O_2O_3O_4$ ergeben sich also folgende acht Möglichkeiten:

I. Die Ebene liegt aufserhalb des Tetraeders,
II. sie trifft die drei Kanten O_1O_2, O_1O_3, O_1O_4,
III. » » » » » O_2O_1, O_2O_3, O_2O_4,
IV. » » » » » O_3O_1, O_3O_2, O_3O_4,
V. » » » » » O_4O_1, O_4O_2, O_4O_3,

VI. sie trifft die beiden Paare von Gegenkanten O_1O_3, O_2O_4 und O_1O_4, O_2O_3,

VII. sie trifft die beiden Paare von Gegenkanten O_1O_2, O_3O_4 und O_1O_4, O_2O_3,

VIII. sie trifft die beiden Paare von Gegenkanten O_1O_2, O_3O_4 und O_1O_3, O_2O_4.

Die Übergänge zwischen diesen verschiedenen Lagen werden erhalten, wenn die Ebene durch einen Eckpunkt des Tetraeders hindurchgeht.

2. Von den Eckpunkten O_1, O_2, O_3, O_4 fällen wir auf eine gegebene Ebene die Senkrechten r_1, r_2, r_3, r_4. Nachdem wir die beiden Teile, in welche der Raum durch die Ebene zerlegt wird, als einen positiven und einen negativen Raumteil unterschieden haben, geben wir auch jeder Senkrechten das positive oder negative Vorzeichen, jenachdem sie in dem einen oder dem andern Teile liegt. Hiernach sind die Vorzeichen nicht ausschliefslich durch die Ebene selbst bestimmt, indem es gestattet ist, einem beliebigen der beiden Teile des Raumes das positive Vorzeichen beizulegen. Aber die Lage zum Tetraeder läfst darüber entscheiden, ob irgend zwei Senkrechte dasselbe oder verschiedenes Vorzeichen bekommen müssen; so haben die Senkrechten r_1 und r_2 verschiedenes oder gleiches Vorzeichen, jenachdem die Kante O_1O_2 von der Ebene getroffen wird oder nicht. Hiernach erkennt man die Richtigkeit der folgenden Tabelle:

	r_1	r_2	r_3	r_4
I	+	+	+	+
	−	−	−	−
II	−	+	+	+
	+	−	−	−
III	+	−	+	+
	−	+	−	−
IV	+	+	−	+
	−	−	+	−
V	+	+	+	−
	−	−	−	+
VI	+	+	−	−
	−	−	+	+

	r_1	r_2	r_3	r_4
VII	+	−	+	−
	−	+	−	+
VIII	+	−	−	+
	−	+	+	−

3.[1] Um die Beziehung aufzufinden, welche zwischen den vier Senkrechten $r_1 \ldots r_4$ besteht, schlagen wir folgenden Weg ein. Von zwei symmetrisch gegen eine Ebene Z gelegenen Punkten B und B', deren Entfernung gleich l ist, fällen wir auf eine Ebene E die Senkrechten m und m'; dann ist

$$(1) \quad m - m' = \pm l \cos (EZ).$$

Wir betrachten jetzt aufser den vier Koordinatenebenen I, II, III, IV zwei Ebenen V und VI. Die Ebene VI, deren Lage gegen verschiedene Ebenen betrachtet werden soll, möge mit der eben benutzten Ebene Z identisch sein; es sollen daher auch immer dieselben beiden Punkte B und B' gebraucht werden. Dagegen soll die Ebene E der Reihe nach mit einer der fünf Ebenen I ... V zusammenfallen. Der Sinn der Drehung für die Keile (I VI) ... (V VI) soll gleichmäfsig festgesetzt sein. Nachdem jetzt, falls dies nötig sein sollte, durch Vertauschung der Punkte B und B' erreicht worden ist, dafs in der Gleichung (1) auf der rechten Seite das positive Vorzeichen steht, wird man dasselbe auch in den daraus hergeleiteten Gleichungen setzen müssen. Nun seien auf die Ebenen I, II, III, IV, V von B aus die Senkrechten p_1, p_2, p_3, p_4, q, und von B' die Senkrechten $p_1' \ldots q'$ gefällt. Dann gelten bei den getroffenen Festsetzungen die Formeln:

$$q - q' = l \cos (V\,VI), \quad p_1 - p_1' = l \cos (I\,VI),$$
$$p_2 - p_2' = l \cos (II\,VI), \quad p_3 - p_3' = l \cos (III\,VI),$$
$$p_4 - p_4' = l \cos (IV\,VI).$$

Indem wir noch die senkrechten Abstände der Punkte O_1, O_2, O_3, O_4 von der Ebene V mit r_1, r_2, r_3, r_4 bezeichnen, erhalten wir nach § 3, 7 (S. 17) die Gleichungen:

$$q = \frac{r_1}{h_1} p_1 + \frac{r_2}{h_2} p_2 + \frac{r_3}{h_3} p_3 + \frac{r_4}{h_4} p_4$$
$$q' = \frac{r_1}{h_1} p_1' + \frac{r_2}{h_2} p_2' + \frac{r_3}{h_3} p_3' + \frac{r_4}{h_4} p_4'.$$

[1] Diese Nummer kann überschlagen werden.

Durch Subtraktion dieser Gleichungen ergiebt sich unter Berücksichtigung der voranstehenden Formeln:

$$(2)\quad \cos(\mathrm{V\,VI}) = \frac{r_1}{h_1}\cos(\mathrm{I\,VI}) + \frac{r_2}{h_2}\cos(\mathrm{II\,VI}) + \frac{r_3}{h_3}\cos(\mathrm{III\,VI}) + \frac{r_4}{h_4}\cos(\mathrm{IV\,VI}).$$

In dieser Gleichung darf die Ebene VI durch irgend eine andere Ebene ersetzt werden; wir dürfen also statt ihrer der Reihe nach eine der Ebenen I, II, III, IV, V wählen. Dadurch gelangen wir zu den Gleichungen:

$$\cos(\mathrm{V\,I}) = \frac{r_1}{h_1}\cos(\mathrm{I\,I}) + \frac{r_2}{h_2}\cos(\mathrm{II\,I}) + \frac{r_3}{h_3}\cos(\mathrm{III\,I}) + \frac{r_4}{h_4}\cos(\mathrm{IV\,I})$$

$$\cos(\mathrm{V\,II}) = \frac{r_1}{h_1}\cos(\mathrm{I\,II}) + \frac{r_2}{h_2}\cos(\mathrm{II\,II}) + \frac{r_3}{h_3}\cos(\mathrm{III\,II}) + \frac{r_4}{h_4}\cos(\mathrm{IV\,II})$$

$$\cos(\mathrm{V\,III}) = \frac{r_1}{h_1}\cos(\mathrm{I\,III}) + \frac{r_2}{h_2}\cos(\mathrm{II\,III}) + \frac{r_3}{h_3}\cos(\mathrm{III\,III}) + \frac{r_4}{h_4}\cos(\mathrm{IV\,III})$$

$$\cos(\mathrm{V\,IV}) = \frac{r_1}{h_1}\cos(\mathrm{I\,IV}) + \frac{r_2}{h_2}\cos(\mathrm{II\,IV}) + \frac{r_3}{h_3}\cos(\mathrm{III\,IV}) + \frac{r_4}{h_4}\cos(\mathrm{IV\,IV})$$

$$\cos(\mathrm{V\,V}) = \frac{r_1}{h_1}\cos(\mathrm{I\,V}) + \frac{r_2}{h_2}\cos(\mathrm{II\,V}) + \frac{r_3}{h_3}\cos(\mathrm{III\,V}) + \frac{r_4}{h_4}\cos(\mathrm{IV\,V}).$$

Infolge der über die Messung der Winkel getroffenen Festsetzung ist, wenn ι und $\varkappa$ irgend zwei Marken der Reihe I ... V sind, $\cos(\iota\varkappa) = \cos(\varkappa\iota)$ und $\cos(\varkappa\varkappa) = 1$. Demnach darf man in der letzten Gleichung cos (I V), cos (II V), cos (III V), cos (IV V) je durch die rechten Seiten der vorangehenden Gleichungen ersetzen. Somit besteht zwischen den vier Senkrechten $r_1 \ldots r_4$ die Beziehung:

$$(3)\quad 1 = \sum_{\iota,\,\varkappa} \frac{r_\iota}{h_\iota}\frac{r_\varkappa}{h_\varkappa}\cos(\iota\varkappa)$$

oder

$$1 = \left(\frac{r_1}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{r_2}{h_2}\right)^2 + \left(\frac{r_3}{h_3}\right)^2 + \left(\frac{r_4}{h_4}\right)^2 + 2\frac{r_1}{h_1}\frac{r_2}{h_2}\cos(\mathrm{I\,II}) + 2\frac{r_1}{h_1}\frac{r_3}{h_3}\cos(\mathrm{I\,III}) + 2\frac{r_1}{h_1}\frac{r_4}{h_4}\cos(\mathrm{I\,IV}) + 2\frac{r_2}{h_2}\frac{r_3}{h_3}\cos(\mathrm{II\,III}) + 2\frac{r_2}{h_2}\frac{r_4}{h_4}\cos(\mathrm{II\,IV}) + 2\frac{r_3}{h_3}\frac{r_4}{h_4}\cos(\mathrm{III\,IV}).$$

Die Winkel sollen durch gleichmäfsige Drehung erhalten werden; sie sind also die Nebenkeile der zum Tetraeder gehörenden Keile. Will man die Innenkeile erhalten, so hat man jedesmal den Winkel durch seinen Nebenwinkel zu ersetzen. Bezeichnet man also den Winkel, welchen die dem Tetraeder selbst angehörenden Teile der Ebenen $O_1O_3O_4$ und $O_2O_3O_4$ mit einander bilden, durch (34) und versteht überhaupt unter $(\iota\varkappa)$ den Winkel, welchen die in der Kante $O_\iota O_\varkappa$ zusammenstofsenden Ebenen des Tetraeders einschliefsen, so lautet die Gleichung:

$$(4)\quad 1 = \left(\frac{r_1}{h_1}\right)^2 + \ldots\ldots - 2\frac{r_1}{h_1}\frac{r_2}{h_2}\cos(34) - \ldots\ldots - 2\frac{r_3}{h_3}\frac{r_4}{h_4}\cos(1\,2).$$

4. Gehen drei Ebenen 0, 1, 2 durch dieselbe Kante, so stehen die von einem beliebigen Punkte des Raumes auf sie gefällten Senkrechten m, m′, m″ in der Beziehung:

$$m = \varrho\, m' + \sigma\, m'',$$

wo ϱ und σ nur von den Winkeln abhangen, welche die drei Ebenen mit einander bilden. Wenn also von den Punkten O_1, O_2, O_3, O_4 auf die Ebene 0 die Senkrechten r_1, r_2, r_3, r_4, auf die Ebene 1 die Senkrechten r_1', r_2', r_3', r_4' und auf die Ebene 2 die Senkrechten r_1'', r_2'', r_3'', r_4'' gefällt sind, so bestehen zwischen diesen Senkrechten folgende Beziehungen:

$$(5)\quad \begin{aligned} r_1 &= \varrho r_1' + \sigma r_1'' \\ r_2 &= \varrho r_2' + \sigma r_2'' \\ r_3 &= \varrho r_3' + \sigma r_3'' \\ r_4 &= \varrho r_4' + \sigma r_4'', \end{aligned}$$

in denen der Quotient $\sigma : \rho$ das Schnittverhältnis darstellt, nach welchem der von den Ebenen 1 und 2 gebildete Winkel durch die Ebene 0 geteilt wird.

5. Es mögen drei Ebenen 1, 2, 3 gegeben sein und durch ihren Schnittpunkt eine vierte Ebene 0 gelegt werden. Zu den ersten Ebenen mögen die Senkrechten gehören $r_1' \ldots r_4$, $r_1'' \ldots r_4''$, $r_1''' \ldots r_4'''$, während der Ebene 0 die Senkrechten $r_1 \ldots r_4$ entsprechen sollen. Wir legen eine fünfte Ebene durch den Schnitt der Ebenen (1, 2) und durch die Linie, welche die Ebenen 0 und 3 gemeinschaftlich haben. Auf diese Ebene seien von den Punkten $O_1 \ldots O_4$ die Senkrechten $s_1 \ldots s_4$ gefällt. Da die letzte Ebene durch den Schnitt der Ebenen 1 und 2 hindurchgeht, müssen nach (5) die Gleichungen bestehen:

$$s_1 = \alpha r_1' + \beta r_1'' \qquad s_3 = \alpha r_3' + \beta r_3''$$
$$s_2 = \alpha r_2' + \beta r_2'' \qquad s_4 = \alpha r_4' + \beta r_4''.$$

In ähnlicher Weise muſs sein:

$$r_1 = \gamma r_1''' + \delta s_1 \qquad r_3 = \gamma r_3''' + \delta s_3$$
$$r_2 = \gamma r_2''' + \delta s_2 \qquad r_4 = \gamma r_4''' + \delta s_4.$$

Somit gelangen wir zu den Gleichungen:

$$(6) \quad \begin{aligned} r_1 &= \lambda r_1' + \mu r_1'' + \nu r_1''' \\ r_2 &= \lambda r_2' + \mu r_2'' + \nu r_2''' \\ r_3 &= \lambda r_3' + \mu r_3'' + \nu r_3''' \\ r_4 &= \lambda r_4' + \mu r_4'' + \nu r_4''', \end{aligned}$$

wo die Koefficienten λ, μ, ν eine leicht zu ermittelnde Bedeutung haben.

Indem wir aus diesen Gleichungen die Koefficienten — 1, λ, μ, ν entfernen, finden wir die Bedingung, daſs die Ebene 0 durch den Schnittpunkt der Ebenen 1, 2, 3 hindurchgeht. Diese wird durch das Verschwinden einer Determinante dargestellt. Die Gleichung ist homogen linear in r_1, r_2, r_3, r_4.

6. Zu demselben Ergebnisse führt auch der folgende Weg.

Sind 1, 2, 3, 4 die vier Eckpunkte des Koordinatentetraeders und ist 5 ein beliebiger Punkt, so ziehe man die Gerade 15 und bestimme ihren Schnittpunkt 6 mit der Ebene 234. Den Punkt 6 verbinde man mit 2 und bezeichne den Schnittpunkt der Geraden 26 und 34 mit 7. Von diesen sieben Punkten fälle man die Senkrechten $r_1 \ldots r_7$ auf eine beliebige Ebene E. Da die Punkte

3, 4, 7 in gerader Linie liegen, so gilt nach I § 3, 1 (S. 13) die Gleichung:

$$r_7 = (1 + \alpha)\, r_3 - \alpha r_4.$$

Es gehören auch die Punkte 6, 7, 2 und 5, 6, 1 je einer geraden Linie an; somit mufs auch sein:

$$r_6 = (1 + \beta)\, r_7 - \beta r_2, \quad r_5 = (1 + \gamma)\, r_6 - \gamma r_1.$$

Daraus ergiebt sich eine Beziehung zwischen den Senkrechten r_5, r_1, r_2, r_3, r_4, nämlich:

$$r_5 = -\gamma r_1 - (1 + \gamma)\beta r_2 + (1 + \alpha)(1 + \beta)(1 + \gamma)\, r_3 - \alpha(1 + \beta)(1 + \gamma)\, r_4.$$

Die Koefficienten hangen nur von der gegenseitigen Lage der fünf Punkte, nicht aber von der Ebene E ab. Indem wir jetzt die vom Punkte 5 auf die Ebene E gefällte Senkrechte mit s bezeichnen, gilt die Gleichung:

$$(7) \quad s = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + \alpha_3 r_3 + \alpha_4 r_4.$$

7. Es ist nicht schwer, die Bedeutung der Koefficienten $\alpha_1 \ldots \alpha_4$ aus den eben benutzten Gröfsen α, β, γ herzuleiten. Indessen ziehen wir es vor, sie dadurch zu finden, dafs wir der Ebene E specielle Lagen geben. Fällt diese Ebene mit der Ebene $O_2O_3O_4$ zusammen, so wird s gleich der vom Punkte 5 auf diese Ebene gefällten Senkrechten p_1; ferner wird $r_1 = h_1$, $r_2 = r_3 = r_4 = 0$. Somit folgt $p_1 = \alpha_1 h_1$. In entsprechender Weise ergiebt sich $p_2 = \alpha_2 h_2$, $p_3 = \alpha_3 h_3$, $p_4 = \alpha_4 h_4$, wo p_1, p_2, p_3, p_4 die vom Punkte 5 auf die Koordinatenebenen gefällten Senkrechten sind. Die Gleichung (7) geht demnach in die folgende über:

$$(8) \quad s = \frac{p_1}{h_1} r_1 + \frac{p_2}{h_2} r_2 + \frac{p_3}{h_3} r_3 + \frac{p_4}{h_4} r_4.$$

Diese Gleichung ist identisch mit der in § 3, 7 gefundenen Gleichung; beide stellen den Abstand des Punktes $(p_1 \ldots p_4)$ von der Ebene $(r_1 \ldots r_4)$ dar.

8. Soll die Ebene E durch den Punkt $(p_1 \ldots p_4)$ gehen, so mufs in den Gleichungen (7) und (8) $s = 0$ sein. Die Gleichung eines jeden Punktes, d. h. die Bedingung dafür, dafs eine Ebene durch einen gegebenen Punkt geht, lautet also:

$$(9) \quad \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + \alpha_3 r_3 + \alpha_4 r_4 = 0$$

oder

$$(10) \quad \frac{p_1}{h_1} r_1 + \frac{p_2}{h_2} r_2 + \frac{p_3}{h_3} r_3 + \frac{p_4}{h_4} r_4 = 0,$$

wo p_1, p_2, p_3, p_4 die Senkrechten sind, welche von dem gegebenen Punkte auf die Koordinatenebenen gefällt sind.

Zugleich drückt aber auch die Gleichung (10) die Bedingung dafür aus, daſs der Punkt (p) und die Ebene (r) zusammenliegen, also der Punkt in der Ebene liegt, die Ebene durch den Punkt geht.

9. Um von dem Tetraeder $O_1O_2O_3O_4$ zu einem andern Koordinaten-Tetraeder überzugehen, ersetzen wir die vier Punkte O_1, O_2, O_3, O_4 durch vier andere Punkte Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 und nennen s_1, s_2, s_3, s_4 die Senkrechten, welche von diesen vier Punkten auf die Ebene (r_1, r_2, r_3, r_4) gefällt werden. Wenn wir also von dem früheren zu dem neuen Koordinatensystem übergehen wollen, so müssen wir die von den Punkten $Q_1 \dots Q_4$ auf irgend eine Ebene gefällten Senkrechten $s_1 \dots s_4$ durch die Senkrechten $r_1 \dots r_4$ ausdrücken, welche auf dieselbe Ebene von den Punkten $O_1 \dots O_4$ gefällt worden sind. Die Gleichungen (7) und (8) geben uns aber sofort die Lösung dieser Aufgabe; es ist nämlich

$$(11)\quad \begin{aligned} s_1 &= \alpha_{11}r_1 + \alpha_{12}r_2 + \alpha_{13}r_3 + \alpha_{14}r_4 \\ s_2 &= \alpha_{21}r_1 + \alpha_{22}r_2 + \alpha_{23}r_3 + \alpha_{24}r_4 \\ s_3 &= \alpha_{31}r_1 + \alpha_{32}r_2 + \alpha_{33}r_3 + \alpha_{34}r_4 \\ s_4 &= \alpha_{41}r_1 + \alpha_{42}r_2 + \alpha_{43}r_3 + \alpha_{44}r_4. \end{aligned}$$

Um die Bedeutung der sechzehn Koefficienten angeben zu können, nennen wir p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{14} die Senkrechten, welche vom Punkte Q_1 auf die Ebenen des ersten Koordinatensystems gefällt werden können. Ebenso sollen $p_{21} \dots p_{24}$ die vom Punkte Q_2 auf die Ebenen des Tetraeders $O_1O_2O_3O_4$ gefällten Senkrechten sein. Die gleiche Bedeutung sollen $p_{31} \dots p_{34}$ für den Punkt Q_3 und $p_{41} \dots p_{44}$ für den Punkt Q_4 haben. Dann muſs sein:

$$\alpha_{11} = \frac{p_{11}}{h_1},\ \alpha_{12} = \frac{p_{12}}{h_2},\ \alpha_{13} = \frac{p_{13}}{h_3},\ \alpha_{14} = \frac{p_{14}}{h_4}$$

. . . . . .

$$\alpha_{41} = \frac{p_{41}}{h_1},\ \alpha_{42} = \frac{p_{42}}{h_2},\ \alpha_{43} = \frac{p_{43}}{h_3},\ \alpha_{44} = \frac{p_{44}}{h_4}.$$

Übungen:

1) Für welche Ebene ist

a) $r_1 = r_2 = r_3 = -r_4$,

b) $r_1 = r_2 = -r_3 = r_4$,

c) $r_1 = r_2 = -r_3 = -r_4$,

d) $r_1 = -r_2 = r_3 = -r_4$?

e) Giebt es eine Ebene, für welche $r_1 = r_2 = r_3 = r_4$ ist?

2) Welche Kanten des Tetraeders werden von je einer der in 1) a)—d) angegebenen Ebenen geschnitten und in welchen Punkten?

3) Man gebe die Gleichungen der in 1) a)—d) aufgestellten Ebenen in den Koordinaten $p_1 \ldots p_4$ an.

4) Wenn auf eine Ebene von den Eckpunkten $O_1 \ldots O_4$ eines Tetraeders die Senkrechten $r_1 \ldots r_4$ gefällt sind, so soll die Gröfse der Senkrechten ermittelt werden, welche auf dieselbe Ebene gefällt werden können

a) von der Mitte M_{12} der Kante O_1O_2,

b) von der Mitte M_{34} der Kante O_3O_4,

c) vom Schwerpunkte S_1 des Dreiecks $O_2O_3O_4$,

d) vom Schwerpunkte S_2 des Dreiecks $O_1O_3O_4$,

e) von der Mitte der Strecke $M_{12}M_{34}$,

f) von dem Punkte, in welchem die Strecke O_1S_1 nach dem Verhältnisse 3 : 1 geteilt wird,

g) von dem Punkte, in welchem die Strecke O_2S_2 nach dem Verhältnisse 3 : 1 geteilt wird.

§ 5.

Die allgemeinsten Tetraeder-Koordinaten.

1. Aus den Gründen, welche wir in I § 5 (S. 25) entwickelt haben, führen wir vier willkürliche Konstanten μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 ein, von denen keine gleich null sein darf, setzen

$$(1) \quad x_1 = \mu_1 p_1, \; x_2 = \mu_2 p_2, \; x_3 = \mu_3 p_3, \; x_4 = \mu_4 p_4$$

und bezeichnen die Gröfsen x_1, x_2, x_3, x_4 als die allgemeinsten Tetraeder-Koordinaten eines Punktes. Ebenso wählen wir vier konstante Faktoren ν_1, ν_2, ν_3, ν_4, welche gleichfalls sämtlich von null verschieden sein müssen, führen die neuen Veränderlichen ein:

$$(2) \quad u_1 = \nu_1 r_1, \; u_2 = \nu_2 r_2, \; u_3 = \nu_3 r_3, \; u_4 = \nu_4 r_4,$$

und nennen sie die allgemeinsten Tetraeder-Koordinaten einer Ebene.

Die Bedingung dafür, dafs der Punkt (p) in die Ebene (r) fällt, wird nach § 3, 8 (S. 18) durch die Gleichung angegeben:

$$\frac{p_1 r_1}{h_1} + \frac{p_2 r_2}{h_2} + \frac{p_3 r_3}{h_3} + \frac{p_4 r_4}{h_4} = 0,$$

wo h_1, h_2, h_3, h_4 die Höhen des Tetraeders sind. Diese Gleichung geht nach Einführung der Variabeln $x_1 \dots x_4$ und $u_1 \dots u_4$ über in

$$\frac{x_1 u_1}{\mu_1 r_1 h_1} + \frac{x_2 u_2}{\mu_2 r_2 h_2} + \frac{x_3 u_3}{\mu_3 r_3 h_3} + \frac{x_4 u_4}{\mu_4 r_4 h_4} = 0.$$

Damit diese Gleichung die Form annimmt:

$$(3) \quad x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + x_4 u_4 = 0,$$

mufs sein:

$$(4) \quad \mu_1 r_1 h_1 = \mu_2 r_2 h_2 = \mu_3 r_3 h_3 = \mu_4 r_4 h_4.$$

Wir bezeichnen ein System von Punktkoordinaten $(x_1 \dots x_4)$ und ein System von Ebenenkoordinaten $(u_1 \dots u_4)$ als zusammengehörig, wenn die Bedingung für das Zusammenfallen eines Punktes (x) und einer Ebene (u) durch die Gleichung (3) ausgedrückt wird. Dazu wird erfordert:

a) dafs die Koordinatentetraeder dieselben sind, und

b) dafs die Koefficienten $\mu_1 \dots \mu_4$ und $r_1 \dots r_4$ in der Beziehung (4) zu einander stehen.

2. Die Gleichungen (1) § 3 (S. 14) sollen der Reihe nach mit μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 multipliziert werden; dadurch gehen sie über in die folgenden:

$$(5) \quad \begin{aligned} x_1 &= (1+\varrho)\, x_1' - \varrho x_1'' \\ x_2 &= (1+\varrho)\, x_2' - \varrho x_2'' \\ x_3 &= (1+\varrho)\, x_3' - \varrho x_3'' \\ x_4 &= (1+\varrho)\, x_4' - \varrho x_4''. \end{aligned}$$

Hier sind $(x_1' \dots x_4')$ die Koordinaten eines Punktes 1, $(x_1'' \dots x_4'')$ die eines Punktes 2 und $(x_1 \dots x_4)$ die eines Punktes 0, der mit den Punkten 1 und 2 in gerader Linie liegt und die Strecke 12 nach dem Verhältnisse $-\varrho : (1+\varrho)$ teilt.

Auf dieselbe Weise leiten wir aus den Gleichungen (3) § 3 (S. 14) folgendes her: Sind (x'), (x''), (x''') drei beliebige Punkte 1, 2, 3 und soll der Punkt 0, dessen Koordinaten $x_1 \dots x_4$ sind, mit ihnen in einer Ebene liegen, so müssen die Gleichungen bestehen:

$$(6)\quad \begin{aligned} x_1 &= \lambda x_1' + \mu x_1'' + \nu x_1''' \\ x_2 &= \lambda x_2' + \mu x_2'' + \nu x_2''' \\ x_3 &= \lambda x_3' + \mu x_3'' + \nu x_3''' \\ x_4 &= \lambda x_4' + \mu x_4'' + \nu x_4'''. \end{aligned}$$

Hier kann man, wie wir in § 3, 4 bewiesen haben, λ, μ, ν als die ebenen Koordinaten des Punktes 0 auffassen, indem man als Koordinatendreieck dasjenige Dreieck wählt, dessen Eckpunkte die Punkte 1, 2, 3 sind.

Die Bedingung dafür, daſs die vier Punkte 0, 1, 2, 3 in einer Ebene liegen, nimmt die Form an:

$$(7)\quad \begin{vmatrix} x_1 & x_1' & x_1'' & x_1''' \\ x_2 & x_2' & x_2'' & x_2''' \\ x_3 & x_3' & x_3'' & x_3''' \\ x_4 & x_4' & x_4'' & x_4''' \end{vmatrix} = 0.$$

Die Gleichung einer beliebigen Ebene ist wieder:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0;$$

die Koordinaten dieser Ebene sind den Koefficienten a_1, a_2, a_3, a_4 proportional.

3. Sind $(u_1 \ldots u_4)$, $(u_1' \ldots u_4')$, $(u_1'' \ldots u_4'')$ die Koordinaten von drei Ebenen 0, 1, 2 eines Büschels, so folgt aus den Gleichungen (5) § 4, 4 (S. 24), daſs ist:

$$(8)\quad \begin{aligned} u_1 &= \varrho u_1' + \sigma u_1'' \\ u_2 &= \varrho u_2' + \sigma u_2'' \\ u_3 &= \varrho u_3' + \sigma u_3'' \\ u_4 &= \varrho u_4' + \sigma u_4''. \end{aligned}$$

Auch stellt der Quotient $\sigma : \varrho$ das Schnittverhältnis dar, nach welchem der Keil (12) durch die Ebene 0 geteilt wird.

Damit die Ebene $(u_1 \ldots u_4)$ durch den Schnittpunkt der drei Ebenen $(u_1' \ldots u_4')$, $(u_1'' \ldots u_4'')$, $(u_1''' \ldots u_4''')$ hindurchgeht, müssen sich nach (6) § 4, 5 drei Koefficienten λ, μ, ν so bestimmen lassen, daſs die Gleichungen befriedigt werden:

$$(9)\quad \begin{aligned} u_1 &= \lambda u_1' + \mu u_1'' + \nu u_1''' \\ u_2 &= \lambda u_2' + \mu u_2'' + \nu u_2''' \\ u_3 &= \lambda u_3' + \mu u_3'' + \nu u_3''' \\ u_4 &= \lambda u_4' + \mu u_4'' + \nu u_4'''. \end{aligned}$$

Die Gleichung eines Punktes hat die Gestalt:

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 = 0;$$

die Koefficienten in dieser Gleichung verhalten sich wie die Koordinaten des Punktes.

4. Die vier Gleichungen (8) können wir in eine einzige Gleichung zusammenfassen. Zu dem Ende gehen wir von den Gleichungen

$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$ und $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 = 0$

aus. Sollen dies die Ebenen $(u_1' \ldots u_4')$ und $(u_1'' \ldots u_4'')$ sein, so müssen sich zwei Koefficienten α und β so bestimmen lassen, dafs die Gleichungen bestehen:

$$(10)\quad \begin{array}{l} a_1 = \alpha u_1',\ a_2 = \alpha u_2',\ a_3 = \alpha u_3',\ a_4 = \alpha u_4' \\ b_1 = \beta u_1'',\ b_2 = \beta u_2'',\ b_3 = \beta u_3'',\ b_4 = \beta u_4''. \end{array}$$

Wir multiplizieren die Gleichungen (8) der Reihe nach mit x_1, x_2, x_3, x_4 und addieren die erhaltenen Produkte. Damit der Punkt (x) der Ebene 0 angehört, mufs nach (3) die Relation bestehen: $x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4 = 0$. Demnach müssen die Koordinaten eines jeden Punktes der Ebene 0 der Gleichung genügen:

$$(\varrho u_1' + \sigma u_1'')\,x_1 + (\varrho u_2' + \sigma u_2'')\,x_2 + (\varrho u_3' + \sigma u_3'')\,x_3 + (\varrho u_4' + \sigma u_4'')\,x_4 = 0;$$

diese geht wegen der Beziehungen (10) über in:

$$\left(\frac{\varrho}{\alpha}a_1 + \frac{\sigma}{\beta}b_1\right)x_1 + \left(\frac{\varrho}{\alpha}a_2 + \frac{\sigma}{\beta}b_2\right)x_2 + \left(\frac{\varrho}{\alpha}a_3 + \frac{\sigma}{\beta}b_3\right)x_3 + \left(\frac{\varrho}{\alpha}a_4 + \frac{\sigma}{\beta}b_4\right)x_4 = 0;$$

oder wenn wir

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = A$$

und $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 = B$ setzen, dann die vorstehende Gleichung mit $\frac{\alpha}{\varrho}$ multiplizieren und $\frac{\alpha\sigma}{\beta\varrho} = \lambda$ setzen, in:

$$(11)\quad A + \lambda B = 0.$$

Schreibt man die Gleichungen zweier Ebenen kurz in der Form $A = 0$, $B = 0$, so stellt sich die Gleichung einer jeden Ebene, die durch die Schnittlinie der beiden gegebenen Ebenen geht, in der Form dar: $A + \lambda B = 0$.

Die Koordinaten einer vierten Ebene des Büschels mögen aus (8) erhalten werden, indem man die Koefficienten ϱ, σ durch ϱ', σ' erhält.

Indem man jetzt

$$\frac{\alpha\sigma'}{\beta\varrho'} = \mu$$

setzt, kann ihre Gleichung in der Form geschrieben werden:

$$A + \mu B = 0.$$

Nun ist

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\alpha\sigma}{\beta\varrho} : \frac{\alpha\sigma'}{\beta\varrho'} = \frac{\sigma}{\varrho} : \frac{\sigma'}{\varrho'};$$

der letzte Quotient stellt aber das Doppelverhältnis der vier Ebenen dar. Somit ist das Doppelverhältnis der vier Ebenen

$$A = 0,\ B = 0,\ A + \lambda B = 0,\ A + \mu B = 0$$

gleich dem Bruch $\lambda : \mu$.

Speciell liegen die beiden Ebenen $A + \lambda B = 0$ und $A - \lambda B = 0$ harmonisch zu den Ebenen $A = 0$, $B = 0$.

5. In ähnlicher Weise können wir mit den Gleichungen (9) verfahren. Es seien

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0,\quad b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 = 0,$$
$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4 = 0$$

die Gleichungen dreier Ebenen; diese Gleichungen sollen kurz in der Form

$$A = 0,\ B = 0,\ C = 0$$

geschrieben werden. Sind $(u_1' \ldots u_4')$, $(u_1'' \ldots u_4'')$, $(u_1''' \ldots u_4''')$ die Koordinaten dieser Ebenen, so muſs sein:

$$a_1 = \alpha u_1',\ a_2 = \alpha u_2',\ a_3 = \alpha u_3',\ a_4 = \alpha u_4',$$
$$b_1 = \beta u_1'',\ b_2 = \beta u_2'',\ b_3 = \beta u_3'',\ b_4 = \beta u_4'',$$
$$c_1 = \gamma u_1''',\ c_2 = \gamma u_2''',\ c_3 = \gamma u_3''',\ c_4 = \gamma u_4'''.$$

Jetzt sei $(x_1 \ldots x_4)$ ein Punkt der Ebene $(u_1 \ldots u_4)$. Dann verschwindet die linke Seite, nachdem man die Gleichungen (11) der Reihe nach mit $x_1 \ldots x_4$ multipliziert und zu einander addiert hat. Die rechte Seite geht aber nach einer einfachen Umformung über in die Form $\nu A + \varrho B + \sigma C$. Daraus folgt der Satz:

Die Gleichung einer jeden Ebene, welche durch den Schnittpunkt der drei Ebenen:

$$A = 0,\ B = 0,\ C = 0$$

hindurchgeht, läfst sich in der Form schreiben:

$$\nu A + \varrho B + \sigma C = 0.$$

6. Dieselbe Methode führt in ihrer Anwendung auf die Gleichungen (5) zu folgendem Ergebnisse. Sind $A = 0$ und $B = 0$

die Gleichungen zweier Punkte, so kann jeder Punkt, der in ihrer Verbindungslinie liegt, durch die Gleichung $A + \mu B = 0$ dargestellt werden. Das Doppelverhältnis der vier Punkte $A = 0$, $B = 0$, $A + \mu B = 0$, $A + \nu B = 0$ ist gleich dem Bruche $\mu : \nu$; speciell liegen die vier Punkte

$$A = 0,\ B = 0,\ A + \mu B = 0,\ A - \mu B = 0$$

harmonisch. Die vier Punkte

$$A + \mu_1 B = 0,\ A + \mu_2 B = 0,\ A + \mu_3 B = 0,\ A + \mu_4 B = 0$$

haben das Doppelverhältnis

$$\frac{\mu_3 - \mu_1}{\mu_2 - \mu_3} : \frac{\mu_4 - \mu_1}{\mu_2 - \mu_4};$$

sie sind speciell harmonisch gelegen, wenn ist

$$\frac{\mu_3 - \mu_1}{\mu_2 - \mu_3} + \frac{\mu_4 - \mu_1}{\mu_2 - \mu_4} = 0.$$

In entsprechender Weise kann man jeden Punkt, welcher mit den drei Punkten

$$A = 0,\ B = 0,\ \Gamma = 0$$

in einer Ebene liegt, durch die Gleichung darstellen:

$$\lambda A + \mu B + \nu \Gamma = 0.$$

7. Es seien $A = 0$, $B = 0$ die Gleichungen zweier Punkte und demnach stelle die Gleichung $A + \lambda B = 0$ einen beliebigen Punkt ihrer Verbindungslinie dar; ebenso mögen die Punkte einer zweiten Geraden durch $A' + \mu B' = 0$ dargestellt werden. Läfst man dem Punkte $A + \lambda B = 0$ der einen Punktreihe jedesmal den Punkt $A' + \lambda B' = 0$ der andern entsprechen, ordnet man also Punkte mit gleichen Parametern einander zu, so werden die Punktreihen projektivisch auf einander bezogen; denn irgend vier Punkte

$$A + \lambda_1 B = 0,\ A + \lambda_2 B = 0,\ A + \lambda_3 B = 0,\ A + \lambda_4 B = 0$$

der einen haben dasselbe Doppelverhältnis, wie die entsprechenden Punkte der andern:

$$A' + \lambda_1 B' = 0,\ A' + \lambda_2 B' = 0,\ A' + \lambda_3 B' = 0,\ A' + \lambda_4 B' = 0.$$

Man kann die projektive Zuordnung aber auch dadurch herstellen, dafs man zwischen den Parametern λ und μ, durch welche die Punkte $A + \lambda B = 0$ der ersten und die Punkte $A' + \mu B' = 0$ der andern bestimmt werden, eine lineare Gleichung bestehen läfst.

Wenn nämlich ist:

$$\mu = \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d},$$

wo a, b, c, d vier konstante Gröfsen sind, so wird

$$\mu_3 - \mu_1 = \frac{(ad - bc)\ (\lambda_3 - \lambda_1)}{(c\lambda_1 + d)\ (c\lambda_3 + d)},\quad \mu_2 - \mu_3 = \frac{(ad - bc)\ (\lambda_2 - \lambda_3)}{(c\lambda_2 + d)\ (c\lambda_3 + d)},$$

also ist

$$\frac{\mu_3 - \mu_1}{\mu_2 - \mu_3} : \frac{\mu_4 - \mu_1}{\mu_2 - \mu_4} = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_4 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_4}.$$

Somit haben je vier Punkte der einen Punktreihe dasselbe Doppelverhältnis wie die entsprechenden Punkte der andern.

In derselben Weise können wir zwei Ebenenbüschel auf einander oder eine Punktreihe auf einen Ebenenbüschel beziehen.

8. Beim Übergange zu einem neuen Koordinatensysteme können wir nicht nur die Punkte O_1, O_2, O_3, O_4 durch irgend vier andere, nicht in einer Ebene liegende Punkte Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 ersetzen, sondern auch an Stelle der vier Koefficienten μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 irgend vier andere Konstante wählen, von denen ebenfalls keine verschwinden darf. Dann geht aus den Gleichungen (13) § 3, 9 (S. 18) unmittelbar hervor, dafs auch die neuen Koordinaten y_1, y_2, y_3, y_4 homogen lineare Funktionen von x_1, x_2, x_3, x_4 sind; es bestehen also die Gleichungen:

$$(12)\quad \begin{aligned} y_1 &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 \\ y_2 &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + b_{24}x_4 \\ y_3 &= b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3 + b_{34}x_4 \\ y_4 &= b_{41}x_1 + b_{42}x_2 + b_{43}x_3 + b_{44}x_4. \end{aligned}$$

Wenn hier $y_1 = 0$ wird, so mufs auch die rechte Seite der ersten Gleichung verschwinden; daher stellt die Gleichung

$$b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 = 0$$

die Ebene $Q_2Q_3Q_4$ dar. Die Koefficienten b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{14} hängen daher zunächst von der Wahl der Ebene $Q_2Q_3Q_4$ ab; nachdem aber diese Ebene gewählt ist, kann man einen gemeinschaftlichen Faktor noch willkürlich wählen. Entsprechendes gilt für die andern Koefficienten; sie dürfen daher im wesentlichen willkürlich angenommen werden, nur dürfen die vier Ebenen $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$, $y_4 = 0$ nicht durch denselben Punkt hindurchgehen; es darf daher kein Wertsystem $x_1 \ldots x_4$ geben,

für welches die rechten Seiten der vier Gleichungen verschwinden. Somit muſs die Determinante

$$(13)\quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix}$$

von null verschieden sein.

Daſs diese Forderung erfüllt sein muſs, sieht man auch auf folgendem Wege. Sollen die beiden Koordinatensysteme $(x_1 \ldots x_4)$ und $(y_1 \ldots y_4)$ geeignet sein, die Punkte des Raumes zu bestimmen, so muſs man nicht nur die Variabeln $y_1 \ldots y_4$ durch $x_1 \ldots x_4$, sondern auch $x_1 \ldots x_4$ durch $y_1 \ldots y_4$ ausdrücken können. Daher muſs es auch möglich sein, die Gleichungen (12) nach den Unbekannten $x_1 \ldots x_4$ aufzulösen; das ist aber nur möglich, wenn die Determinante (13) nicht verschwindet.

9. Auch für Ebenenkoordinaten wird, wie aus den Gleichungen (11) § 4, 9 (S. 28) folgt, der Übergang von einem System zum andern durch homogen lineare Gleichungen vermittelt. Es fragt sich aber, in welcher Beziehung die Koefficienten stehen, falls auch die neuen Punkt- und Ebenenkoordinaten in dem vorhin definierten Sinne zusammengehören. Dann sind die Ebenenkoordinaten v_1, v_2, v_3, v_4 mit den Punktkoordinaten y_1, y_2, y_3, y_4 derartig verbunden, daſs jedesmal, so oft ein Punkt (y) in eine Ebene (v) fällt, die Gleichung befriedigt wird:

$$(14)\quad y_1v_1 + y_2v_2 + y_3v_3 + y_4v_4 = 0.$$

Da in diesem Falle auch jedesmal

$$(15)\quad x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4 = 0$$

ist, so dürfen die linken Seiten dieser Gleichungen sich nur um einen konstanten Faktor ϖ unterscheiden. Indem wir für $y_1 \ldots y_4$ die Werte (12) einsetzen, geht die linke Seite von (14) über in

$$\begin{aligned}(b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4)\, v_1 \\ + (b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + b_{24}x_4)\, v_2 \\ + (b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3 + b_{34}x_4)\, v_3 \\ + (b_{41}x_1 + b_{42}x_2 + b_{43}x_3 + b_{44}x_4)\, v_4.\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck wird aber gleich

$$\varpi\,(x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4),$$

wenn die Variabeln x_1, x_2, x_3, x_4 je mit demselben Ausdruck multipliziert werden, wenn also ist:

$$(16)\quad \begin{aligned} \omega u_1 &= b_{11}v_1 + b_{21}v_2 + b_{31}v_3 + b_{41}v_4 \\ \omega u_2 &= b_{12}v_1 + b_{22}v_2 + b_{32}v_3 + b_{42}v_4 \\ \omega u_3 &= b_{13}v_1 + b_{23}v_2 + b_{33}v_3 + b_{43}v_4 \\ \omega u_4 &= b_{14}v_1 + b_{24}v_2 + b_{34}v_3 + b_{44}v_4. \end{aligned}$$

Sind x_1, x_2, x_3, x_4 und u_1, u_2, u_3, u_4 zusammengehörige Punkt- und Ebenenkoordinaten, so werden auch die neuen Punktkoordinaten y_1, y_2, y_3, y_4 mit den neuen Ebenenkoordinaten zusammengehören, wenn man durch reciproke Transformationen, wie sie durch die Gleichungen (12) und (16) angegeben werden, zu den neuen Systemen übergeht.

Übungen:

1) Statt die Koordinaten $x_1 \ldots x_4$ aus den Senkrechten $p_1 \ldots p_4$ durch Multiplikation mit festen Konstanten $\mu_1 \ldots \mu_4$ herzuleiten, kann man sie auch als diejenigen Strecken definieren, welche von dem zu bestimmenden Punkte aus, zu vorgeschriebenen Richtungen parallel, bis zu den Koordinatenebenen gezogen sind.

a) Wenn S_1 der Schwerpunkt des Dreiecks $O_2O_3O_4$, S_2 der von $O_1O_3O_4$, S_3 der von $O_1O_2O_4$ und S_4 der von $O_1O_2O_3$ ist, und wenn die Koordinaten der Reihe nach parallel zu O_1S_1, O_2S_2, O_3S_3, O_4S_4 gezogen sind, so soll man die Werte von μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 bestimmen.

b) Es sei x_1 parallel zu l_1, x_2 parallel zu l_2, x_3 zu l_3, x_4 zu l_4, wo $l_1 \ldots l_4$ gegebene Halbgerade sind, und wo l_1 zur Ebene $O_2O_3O_4$ unter dem Winkel α_1, l_2 zu $O_1O_3O_4$ unter dem Winkel α_2, l_3 zu $O_1O_2O_4$ unter $\sphericalangle\ \alpha_3$, l_4 zu $O_1O_2O_3$ unter $\sphericalangle\ \alpha_4$ geneigt ist. Welche Werte haben jetzt die Koefficienten $\mu_1 \ldots \mu_4$?

2) Man darf auch als Koordinaten $x_1 \ldots x_4$ die Strecken wählen, welche von dem zu bestimmenden Punkte aus nach den Koordinatenebenen je unter den Winkeln α_1, α_2, α_3, α_4 gezogen werden können. Man gebe die Werte an, welche die Koefficienten $\mu_1 \ldots \mu_4$ bei dieser Festsetzung erhalten.

3) Als Koordinaten $x_1 \ldots x_4$ eines Punktes P wähle man mit Möbius die Volumina der Pyramiden $O_2O_3O_4P$, $O_3O_4O_1P$, $O_4O_1O_2P$, $O_1O_2O_3P$, indem man jeden Rauminhalt mit dem

positiven oder negativen Vorzeichen versieht, jenachdem der Punkt P dem positiven oder negativen Raumteile gegen die entsprechende Tetraederseite angehört.

a) Welche Gleichung besteht zwischen diesen vier Gröfsen?

b) Welche Werte hat man den Koefficienten $\mu_1 \ldots \mu_4$ beizulegen, um diese Koordinaten auf dem Wege zu erhalten, welcher im Anfange dieses Paragraphen angegeben ist?

c) Welches sind die Ebenenkoordinaten, die mit diesen Punktkoordinaten zusammengehören?

§ 6.

Die uneigentlichen Gebilde des Raumes.

1. Ehe wir weitergehen, wollen wir im Anschlufs an I § 8 die Lehre von den uneigentlichen Gebilden zum Abschlufs bringen. Wir haben schon gesehen, dafs wir auf jeder geraden Linie AB einen, und zwar einen einzigen, uneigentlichen Punkt, den sogenannten unendlichfernen Punkt, annehmen müssen. Nun liegt jede Parallele zu AB mit ihr in einer Ebene, ohne sie in einem eigentlichen Punkte zu schneiden. Soll also der Satz, dafs zwei in einer Ebene gelegene Gerade einen Punkt gemeinschaftlich haben, keine Ausnahme erleiden, so müssen wir verlangen, dafs alle parallelen Geraden denselben unendlichfernen Punkt besitzen.

2. Sobald zwei Ebenen einen eigentlichen Punkt gemein haben, schneiden sie sich, wie die Stereometrie nachweist, in einer eigentlichen Geraden. Parallele Ebenen haben keine eigentliche Gerade gemeinschaftlich; damit also der Satz: Zwei (verschiedene) Ebenen schneiden einander in einer geraden Linie, allgemeine Gültigkeit besitzt, müssen wir annehmen, dafs parallele Ebenen eine uneigentliche Gerade gemeinschaftlich haben. Diese Gerade kann keine eigentlichen, sondern nur uneigentliche Punkte besitzen; in ihr müssen aber alle uneigentlichen Punkte der beiden Ebenen liegen, da sie von jeder in einer dieser Ebenen gelegenen Geraden geschnitten werden mufs. Daraus ergiebt sich von neuem der Satz, dafs alle unendlichfernen Punkte einer Ebene in gerader Linie liegen; unsere Betrachtung zeigt uns aber auch, dafs alle einander parallelen Ebenen dieselbe unendlichferne Gerade gemeinschaftlich haben.

3. Jetzt gilt der Satz allgemein, daſs eine Gerade mit einer Ebene, in der sie nicht ganz enthalten ist, einen Punkt gemein hat. Man lege nämlich durch die Gerade und einen Punkt der gegebenen Ebene eine zweite Ebene; die Schnittlinie der beiden Ebenen liegt mit der gegebenen Geraden in einer Ebene, hat also einen Punkt mit ihr gemeinschaftlich, und dieser Punkt gehört sowohl der gegebenen Geraden wie der gegebenen Ebene an.

Daraus folgt, daſs drei Ebenen, welche keine gerade Linie gemeinschaftlich haben, sich in einem eigentlichen oder uneigentlichen Punkte schneiden. Die drei Ebenen können einander nicht parallel sein, weil sie sonst dieselbe unendlichferne Gerade gemeinschaftlich hätten; daher müssen sich mindestens zwei unter ihnen in einer Geraden schneiden. Der Punkt, den die Schnittlinie von zwei Ebenen mit der dritten Ebene gemein hat, gehört allen drei Ebenen an.

4. Um den eigentlichen Punkt P mit dem uneigentlichen Punkte einer geraden Linie zu verbinden, hat man durch den Punkt P die Parallele zu AB zu ziehen. Sollen aber die beiden unendlichfernen Punkte der Geraden AB und CD, die natürlich nicht parallel sein dürfen, durch eine gerade Linie verbunden werden, so konstruiert man eine Ebene, die zu den beiden Geraden parallel ist; die unendlichferne Gerade dieser Ebene ist die verlangte Linie.

5. Durch eine eigentliche Gerade und einen unendlichfernen Punkt, der der Geraden nicht angehört, läſst sich eine Ebene legen; es ist die Ebene, welche durch die gegebene Gerade parallel zu einer geraden Linie gelegt werden kann, in der der unendlichferne Punkt liegt.

Auch durch eine unendlichferne Gerade und einen eigentlichen Punkt kann man eine Ebene legen. Zur Bestimmung der uneigentlichen Geraden muſs eine Ebene gegeben sein, der die Gerade angehört. Man hat also durch den Punkt eine Ebene zu legen, welche zu der gegebenen Ebene parallel ist.

Soll aber eine Ebene durch eine unendlichferne Gerade und einen ihr nicht angehörenden uneigentlichen Punkt gehen, so kann auf ihr kein eigentlicher Punkt liegen, da sie sonst nur die Punkte einer einzigen uneigentlichen Geraden enthielte. Eine solche Ebene enthält daher nur uneigentliche Punkte und uneigent-

liche Gerade; da sie aber andererseits mit jeder eigentlichen Ebene eine Gerade und mit jeder eigentlichen Geraden einen Punkt gemeinschaftlich hat, so müssen in ihr alle uneigentlichen Punkte und geraden Linien liegen. Somit gehören alle uneigentlichen Punkte des Raumes einer Ebene, der unendlichfernen Ebene, an.

Dasselbe können wir auch auf folgende Weise erkennen. Wenn zwei unendlichferne Gerade gegeben sind, so liegt jede von ihnen in einer eigentlichen Ebene; diese beiden Ebenen können nicht parallel sein, weil die unendlichfernen Geraden als verschieden vorausgesetzt werden. Daher haben die Ebenen eine eigentliche Schnittlinie, und der unendlichferne Punkt derselben ist den beiden gegebenen Geraden gemeinschaftlich. Demnach läfst sich durch die beiden gegebenen Geraden eine Ebene legen. Nimmt man jetzt eine dritte unendlichferne Gerade hinzu, so mufs sie die beiden ersten Geraden schneiden, also in der durch sie bestimmten Ebene liegen. Alle unendlichfernen Geraden gehören also einer Ebene an.

6. Da jede Gerade im Unendlichfernen zusammenhängt und gleichsam als eine geschlossene Linie zu betrachten ist, so wird der Raum durch eine Ebene nicht zerlegt, sobald man die unendlichferne Ebene mit in Betracht zieht.

Durch zwei beliebige Punkte A und B, von denen keiner in einer Ebene I liegt, läfst sich eine gerade Linie legen; von den beiden Teilen dieser Linie, die in den Punkten A und B begrenzt werden, hat nur einer einen Punkt mit der Ebene I gemeinschaftlich; man kann also vom Punkte A zum Punkte B übergehen, ohne der Ebene zu begegnen.

Zwei Ebenen zerlegen aber den Raum immer in zwei Teile. Schneiden sich die Ebenen in einer eigentlichen Geraden g, so denke man die eine Ebene um die Gerade g gedreht, bis sie in die Lage der zweiten Ebene gelangt; der Raum, den sie bei dieser Bewegung beschreibt, besteht aus einem Keil und seinem Scheitelkeil; dem übrigen Raume gehören die beiden Nebenkeile an. Dafs zwei parallele Ebenen bei der von uns eingeführten Anschauung den Raum in zwei Teile zerlegen, ist sofort klar.

Drei Ebenen, die sich nicht in einer geraden Linie schneiden, grenzen vier Raumteile gegen einander ab. Für unsern Zweck genügt es, darauf hinzuweisen, dafs in dem Falle, wo die drei

Ebenen einen eigentlichen Punkt gemein haben, sich jedesmal das Innere eines Dreikants mit dem seines Gegendreikants zu einem einzigen Raumteile vereinigt.

7. Vier Ebenen, die nicht durch denselben Punkt gehen, zerlegen den Raum in acht Teile. Wir begnügen uns damit, den Beweis in dem Falle durchzuführen, dafs je drei der gegebenen Ebenen einen eigentlichen Punkt gemeinschaftlich haben. Es seien dies die Punkte O_1, O_2, O_3, O_4. Die Gerade O_1O_2 wird durch die Punkte O_1 und O_2 in eine endliche und eine unendliche Strecke zerlegt; die erstere bezeichnen wir mit O_1O_2, die letztere mit $\overline{O_1O_2}$. Entsprechende Bezeichnungen führen wir für jede Kante $O_\iota O_\varkappa$ ein, wo wir unter ι, $\varkappa$ zwei verschiedene Marken der Reihe 1, 2, 3, 4 verstehen; stets soll $O_\iota O_\varkappa$ die endliche, $\overline{O_\iota O_\varkappa}$ die unendliche Strecke sein, die in den Punkten O_ι und $O_\varkappa$ begrenzt sind.

Nach I § 8, 9 (S. 51) ist jeder Teil, in welchen eine Ebene durch drei gerade Linien zerlegt wird, ein Dreieck im weiteren Sinne, und jedes derartige Dreieck wird, falls seine Eckpunkte eigentliche Punkte sind, entweder von einer oder von drei endlichen Strecken begrenzt. Unter $(O_\iota O_\varkappa O_\lambda)$ verstehen wir das endliche Dreieck mit den Eckpunkten O_ι, $O_\varkappa$, O_λ; dagegen soll das Dreieck $(O_\iota O_\varkappa \overline{O_\lambda})$ von der endlichen Strecke $O_\iota O_\varkappa$ und den unendlichen Strecken $\overline{O_\iota O_\lambda}$ und $\overline{O_\varkappa O_\lambda}$ eingeschlossen werden.

Jetzt beweisen wir den Satz:

Jeder Teil, in den der Raum durch vier Ebenen zerlegt wird, wird von vier Dreiecken begrenzt; in Bezug auf diese Dreiecke sind drei Fälle möglich: entweder a) sind sie alle endlich, oder b) eins ist endlich und die drei andern unendlich, oder c) die vier Dreiecke sind unendlich.

Der erste Teil des Satzes ist eine unmittelbare Folge davon, dafs jeder Teil, in welchen die Ebene durch drei gerade Linien zerlegt wird, als Dreieck aufgefafst werden kann. Um den zweiten Teil zu beweisen, nehmen wir an, der Grenze gehörten zwei endliche Dreiecke an. Dann liegen auf der Grenze auch fünf endliche Strecken; da aber die Zahl der Kanten gleich sechs ist, so könnte höchstens eine unendliche Strecke bei der Einschliefsung der beiden andern Dreiecke vorkommen. Das ist aber unmöglich;

also sind auch die beiden andern Grenzdreiecke endlich. (Wenn z. B. die beiden endlichen Dreiecke $O_2O_3O_4$ und $O_1O_3O_4$ der Grenze angehören, so liegen auf der den Raumteil begrenzenden Gesamtfläche die fünf endlichen Kanten O_3O_3, O_2O_4, O_3O_4, O_1O_3 und O_1O_4; es kann sich also nur noch fragen, ob die beiden andern Dreiecke als letzte Seite die Strecke O_1O_2 oder die Strecke $\overline{O_1O_2}$ haben; da aber ein Dreieck entweder keine oder zwei unendliche Seiten besitzen mufs, so ist auch die endliche Strecke O_1O_2 eine Seite der fehlenden Dreiecke.) Somit ist die Zahl der endlichen Dreiecke gleich vier oder gleich eins oder gleich null.

8. Hiernach übersieht man unmittelbar die Zahl der Teile, in welche der Raum durch die vier Ebenen zerlegt wird. Offenbar giebt es nur einen Raumteil, der von vier endlichen Dreiecken eingeschlossen wird; es ist dies das Innere des Tetraeders. Soll dagegen der Raumteil durch drei unendliche und ein endliches Dreieck begrenzt werden, so kann man das letztere auf jeder der vier Ebenen annehmen. Wenn $O_2O_3O_4$ das endliche Dreieck ist, so gehört jede seiner Seiten noch einer andern Seitenfläche an. Jede dieser Flächen besitzt aber zwei unendliche Seiten; es sind das diejenigen Strecken, welche nach dem dritten Eckpunkte O_1 gehen. Demnach gehören der Grenze die endlichen Kanten O_2O_3, O_2O_4, O_3O_4 und die unendlichen Kanten $\overline{O_1O_2}$, $\overline{O_1O_3}$, $\overline{O_1O_4}$ an; der Raumteil wird von dem endlichen Dreiecke $(O_2O_3O_4)$ und den drei unendlichen Dreicken $(O_2O_3\overline{O_1})$, $(O_2O_4\overline{O_1})$ und $(O_3O_4\overline{O_1})$ eingeschlossen. Offenbar erhalten wir vier derartige Teile des Raumes.

Wir fragen uns jetzt, wie die Raumteile beschaffen sind, auf deren Grenze keine endlichen Dreiecke liegen. In diesem Falle enthält jedes Grenzdreieck eine endliche und zwei unendliche Seiten. Kommt O_1O_2 unter den endlichen Seiten vor, so dürfen die beiden Dreiecke, welche diese Kante gemeinschaftlich haben, keine weitere endliche Kante besitzen. Auf der Grenze des Raumteils liegen daher die unendlichen Strecken $\overline{O_1O_3}$, $\overline{O_1O_4}$, $\overline{O_2O_3}$, $\overline{O_2O_4}$. Dann müssen aber die beiden andern Dreiecke, von denen das eine seine Eckpunkte in O_1, O_3 und O_4, das andere in O_2, O_3, O_4 hat, noch eine endliche Kante besitzen; das kann

nur die Kante O_3O_4 sein. Der Raumteil wird also von den unendlichen Dreiecken $(O_1O_2\overline{O_3})$, $(O_1O_2\overline{O_4})$, $(O_3O_4\overline{O_1})$, $(O_3O_4\overline{O_2})$ eingeschlossen. Solcher Raumteile giebt es drei, da wir das Paar O_1O_2, O_3O_4 durch O_1O_3, O_2O_4 und durch O_1O_4, O_2O_3 ersetzen können.

9. Dafs die Lehre von den Doppelverhältnissen bei der Hinzunahme der uneigentlichen Gebilde des Raumes ungeändert bleibt, bedarf nach der eingehenden Besprechung der ähnlichen Beziehungen für die Ebene (I 9 S. 53) keiner besondern Erläuterung. Wenn wir z. B. den Satz, dafs alle geraden Linien durch vier Ebenen eines Büschels nach demselben Doppelverhältnis geschnitten werden, als allgemein gültig beweisen wollen, so haben wir nur noch den Fall zu erledigen, dafs die Transversale einer der vier Ebenen parallel ist, ohne zur Kante parallel zu sein. In diesem Falle braucht man aber nur durch die Transversale und einen Punkt der Axe eine Ebene zu legen, um den Satz, dafs wir jetzt dasselbe Doppelverhältnis erhalten, auf den in § 9, 4 bewiesenen Satz zurückzuführen.

10. Es ist noch nachzuweisen, dafs vier Ebenen, welche einander parallel sind, also dieselbe unendlichferne Kante besitzen, von allen sie durchschneidenden Geraden nach demselben Doppelverhältnisse geschnitten werden. Die Richtigkeit des Satzes folgt für zwei in einer Ebene liegende Transversalen auf die in I § 9, 6 angegebene Weise. Wenn aber die Transversalen zu einander windschief sind, so nehme man eine dritte hinzu, welche je mit einer von ihnen in einer Ebene liegt, etwa der einen parallel ist und die andere schneidet.

Übungen:

1) a) Vier harmonische Ebenen, welche durch dieselbe eigentliche Kante hindurchgehen, werden von einer Geraden durchschnitten, welche zu einer dieser Ebenen parallel ist; wie liegen die drei eigentlichen Schnittpunkte zu einander?

b) Die vier Ebenen werden von einer Ebene durchschnitten, welche zur gemeinsamen Kante, aber nicht zu einer der Ebenen parallel ist; wie liegen die Schnittlinien zu einander?

c) Die vier Ebenen werden von einer Ebene geschnitten, welche zu einer unter ihnen parallel ist; die gegenseitige Lage der Schnittlinien soll angegeben werden.

2) Man unterscheidet Strahlenbüschel mit einem eigentlichen und einem uneigentlichen Mittelpunkte, sowie Ebenenbüschel mit einer eigentlichen und einer uneigentlichen Geraden als Axe, endlich Punktreihen auf einer eigentlichen und einer uneigentlichen Geraden als Träger; man charakterisiere die einzelnen Arten.

3) Indem man dem Raume die uneigentlichen Punkte beilegt und ihn somit im Unendlichfernen als zusammenhangend betrachtet, sollen die Teilungen angegeben werden, welche entstehen:

a) durch drei einander parallele Ebenen,

b) durch zwei parallele und die unendlichferne Ebene,

c) durch drei Ebenen, welche sich paarweise in parallelen Geraden schneiden,

d) durch drei sich in einem Punkte schneidende und die unendlichferne Ebene,

e) durch vier Ebenen, welche paarweise parallel sind.

§ 7.

Die Quotienten der Koordinaten als Doppelverhältnisse.

1. Denjenigen Punkt, für den die vier Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 denselben Wert haben, nennen wir den Einheitspunkt des Systems. Bezeichnen wir die von diesem Punkte auf die Koordinatenebenen gefällten Senkrechten mit e_1, e_2, e_3, e_4, so ist (nach § 5, 1) $x_1 = \mu_1 e_1$, $x_2 = \mu_2 e_2$, $x_3 = \mu_3 e_3$, $x_4 = \mu_4 e_4$, also müssen die Gleichungen bestehen:

$$(1) \quad \mu_1 e_1 = \mu_2 e_2 = \mu_3 e_3 = \mu_4 e_4.$$

Wenn für einen Punkt, von dem aus die Senkrechten p_1, p_2, p_3, p_4 auf die Koordinatenebenen gefällt sind, $p_1 : p_4 = \mu_4 : \mu_1$ sein soll, so mufs der Punkt auf einer gewissen Ebene liegen, die leicht gefunden werden kann, sobald man die Werte von μ_1 und μ_4 kennt. Demnach kann der Einheitspunkt als der (eigentliche oder uneigentliche) Schnittpunkt der drei Ebenen $\mu_1 p_1 = \mu_4 p_4$, $\mu_2 p_2 = \mu_4 p_4$, $\mu_3 p_3 = \mu_4 p_4$ oder der Ebenen $x_1 = x_4$, $x_2 = x_4$, $x_3 = x_4$ gefunden werden. Dieser Punkt gehört auch, unabhängig davon, ob er ein eigentlicher oder uneigentlicher Punkt ist, den Ebenen $\mu_1 p_1 = \mu_2 p_2$, $\mu_1 p_1 = \mu_3 p_3$, $p_2 p_2 = \mu_3 p_3$ (oder den Ebenen $x_1 = x_2$, $x_1 = x_3$, $x_2 = x_3$) an.

2. Umgekehrt können wir jeden Punkt, der nicht auf einer Koordinatenebene liegt, zum Einheitspunkte wählen und dann die Verhältnisse der Koordinaten für jeden Punkt bestimmen. Wir beweisen den Satz vorläufig nur unter der Annahme, daſs sowohl die Eckpunkte des Koordinatentetraeders wie der Einheitspunkt eigentliche Punkte sind. Dann können wir auf die Seiten des Tetraeders die Senkrechten e_1, e_2, e_3, e_4 fällen. Nach (1) müssen die vier Produkte $\mu_1 e_1$, $\mu_2 e_2$, $\mu_3 e_3$, $\mu_4 e_4$ einander gleich sein; den gemeinschaftlichen Wert können wir noch willkürlich wählen und dann die Koefficienten μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 eindeutig bestimmen. Wir können aber vermittelst der Gleichungen (1) die Verhältnisse dieser vier Koefficienten berechnen und finden somit für jeden Punkt die Verhältnisse der Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4. Somit gilt der Satz:

Kennt man das Koordinatentetraeder und den Einheitspunkt, so können die Verhältnisse der Koordinaten für jeden Punkt ermittelt werden.

3. Es ist

$$(2)\quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{\mu_1 p_2}{\mu_2 p_2} = \frac{p_1}{p_2} : \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{p_1}{p_2} : \frac{e_1}{e_2}.$$

Hier ist p_1 die vom Punkte $(x_1 \ldots x_4)$ auf die Ebene $O_2O_3O_4$ und p_2 die von demselben Punkte auf die Ebene $O_1O_3O_4$ gefällte Senkrechte. Auf dieselben beiden Ebenen sind vom Einheitspunkte E die Senkrechten e_1 und e_2 gefällt.

Demnach stellt der Bruch

$$\frac{p_1}{p_2} : \frac{e_1}{e_2}$$

das Doppelverhältnis dar, nach welchem der von den Ebenen $O_2O_3O_4$ und $O_1O_3O_4$ gebildete Winkel durch diejenigen beiden Ebenen geteilt wird, welche durch ihre Kante und je einen der Punkte P und E gelegt werden können. Es ist also

$$(2)\quad \frac{x_1}{x_2} = (O_3O_4 : O_2O_1PE).$$

Wir wollen diesen Satz auch in anderer Weise aussprechen. Zu dem Ende nennen wir die vier Koordinatenebenen I, II, III, IV. Durch die Schnittlinie O_3O_4 der Ebenen I und II legen wir eine Ebene Π_{12}, die den Punkt P, und eine Ebene E_{12}, die den Punkt E enthält. In ähnlicher Weise bestimmen wir die Ebenen

Π_{13}, Π_{14}, Π_{23}, Π_{24}, Π_{34} und die Ebenen E_{13}, E_{14}, E_{23}, E_{24}, E_{34}. Dann gelten die Beziehungen:

$$(3)\quad \frac{x_1}{x_2} = (\mathrm{I\,II}\ \Pi_{12}\ E_{12}),\ \ldots\ \frac{x_3}{x_4} = (\mathrm{III\,IV}\ \Pi_{34}\ E_{34}).$$

Die Kante $O_\iota O_\varkappa$ möge, wo ι, $\varkappa$ irgend zwei Marken aus der Reihe 1, 2, 3, 4 sind, die Ebene $\Pi_{\iota\varkappa}$ in einem Punkte $P_{\iota\varkappa}$ und die Ebene $E_{\iota\varkappa}$ in einem Punkte $E_{\iota\varkappa}$ treffen; alsdann besteht die Gleichung:

$$(4)\quad x_\iota : x_\varkappa = (O_\varkappa O_\iota\, P_{\iota\varkappa} E_{\iota\varkappa}).$$

4. Einheitsebene nennen wir diejenige Ebene, für welche die Koordinaten u_1, u_2, u_3, u_4 denselben Wert haben. Diese Ebene hat in den Punktkoordinaten die Gleichung:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

Sie schneidet demnach die Kante O_1O_2 in einem Punkte:

$$x_3 = x_4 = 0,\ x_1 + x_2 = 0.$$

Diejenige Ebene, welche durch die Kante O_3O_4 und den Einheitspunkt geht, hat nach 1. die Gleichung:

$$x_1 - x_2 = 0.$$

Nun liegen (nach § 5, 4) die vier Ebenen

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_1 + x_2 = 0,\ x_1 - x_2 = 0$$

harmonisch; sie schneiden also auch die Kante O_1O_2 in vier harmonischen Punkten. Den Schnittpunkt mit der Ebene $x_1 - x_2 = 0$ haben wir soeben schon mit E_{12} bezeichnet; wir nennen den Schnittpunkt mit der Ebene $x_1 + x_2 = 0$ (und demnach auch mit der Ebene $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$) E_{12}'. Dann liegen die Punkte E_{12} und E_{12}' zu den Punkten O_1 und O_2 harmonisch. Demnach schneidet die Einheitsebene jede Kante $O_\iota O_\varkappa$ in einem Punkte $E_{\iota\varkappa}'$, der in Bezug auf die Punkte O_ι und $O_\varkappa$ zu dem vorhin eingeführten Punkte $E_{\iota\varkappa}$ harmonisch liegt.

Umgekehrt können wir auf der Kante O_1O_2 den zu E_{12} harmonischen Punkt E_{12}', auf O_1O_3 den zu E_{13} harmonischen Punkt E_{13}' und auf O_1O_4 den zu E_{14} harmonischen Punkt E_{14}' bestimmen. Die durch diese drei Punkte gelegte Ebene hat die Gleichung:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$

wie man auf folgende Weise sieht:

Für $x_3 = x_4 = 0$ mufs ihre Gleichung übergehen in $x_1 + x_2 = 0$, also müssen x_1 und x_2 denselben Koefficienten haben; da die

Gleichung für $x_2 = x_4 = 0$ in $x_1 + x_3 = 0$ und für $x_2 = x_3 = 0$ in $x_1 + x_4 = 0$ übergeht, so müssen die vier Koefficienten denselben Wert haben; sie ist also die Einheitsebene.

Hätte man dieselbe Konstruktion für irgend drei andere, in einem Eckpunkte zusammenstofsende Kanten durchgeführt, so wäre man zu derselben Ebene gelangt; daher gilt der Satz:

Sucht man auf jeder Kante eines Tetraeders den Schnittpunkt mit der durch die gegenüberliegende Kante und einen festen Punkt gelegten Ebene und bestimmt denjenigen Punkt, welcher zu diesem Schnittpunkte in Bezug auf die in der Kante gelegenen Eckpunkte harmonisch liegt, so erhält man sechs Punkte, welche in einer Ebene liegen.

Diejenige Ebene, welche dem festen Punkte gegenüber die in diesem Lehrsatze angegebene Lage hat, nennen wie die Harmonikalebene des Punktes in Bezug auf das Tetraeder.

Hieraus geht hervor, dafs nur dann die Bedingung für das Zusammenfallen eines Punktes (x) und einer Ebene (u) in der Form:

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + x_4 u_4 = 0$$

ausgedrückt werden kann, wenn die Einheitsebene die Harmonikalebene zum Einheitspunkte in Bezug auf das Koordinaten-Tetraeder ist. Umgekehrt genügt aber auch diese Lage, damit die Bedingungsgleichung die angegebene Form erhält. Wir können daher sagen:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs Punkt- und Ebenenkoordinaten zusammengehören, besteht darin, dafs

a) beiden Systemen dasselbe Tetraeder zu Grunde liegt,

b) die Einheitsebene die Harmonikalebene des Einheitspunktes für das Koordinaten-Tetraeder ist.

5. Es sollen ν_1, ν_2, ν_3, ν_4 wieder die vier eingeführten Koefficienten sein, und mit ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 sollen die Senkrechten bezeichnet werden, welche von den Punkten O_1, O_2, O_3, O_4 auf die Einheitsebene gefällt werden können. Dann mufs sein:

$$(5) \quad \nu_1 \varepsilon_1 = \nu_2 \varepsilon_2 = \nu_3 \varepsilon_3 = \nu_4 \varepsilon_4.$$

Sind wieder u_1, u_2, u_3, u_4 die Koordinaten einer beliebigen Ebene und r_1, r_2, r_3, r_4 die von den Punkten O_1, O_2, O_3, O_4 auf sie gefällten Senkrechten, so ist:

$$u_1 = \nu_1 r_1,\ u_2 = \nu_2 r_2,\ u_3 = \nu_3 r_3,\ u_4 = \nu_4 r_4,$$

also:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{\nu_1 r_1}{\nu_2 r_2} = \frac{r_1}{r_2} : \frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{r_1}{r_2} : \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

Die Einheitsebene wird von den einzelnen Kanten in den Punkten E_{12}', $E_{13}' \ldots E_{34}'$ getroffen, die wir bereits oben eingeführt haben; die Schnittpunkte der Kanten mit der Ebene (u_1, u_2, u_3, u_4) mögen mit C_{12}, $C_{13} \ldots C_{34}$ bezeichnet werden. Dann stellt der Quotient $\frac{r_1}{r_2} : \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ das Doppelverhältnis der vier Punkte $(O_1 O_2 C_{12} E_{12}')$ dar; somit ist:

$$\frac{u_1}{u_2} = (O_1 O_2 C_{12} E_{12}')$$

und entsprechend:

(6) $u_1 : u_3 = (O_1 O_3 C_{13} E_{13}') \ldots u_3 : u_4 = (O_3 O_4 C_{34} E_{34}')$.

Sind u_1, u_2, u_3, u_4 die Koordinaten einer Ebene, so stellt der Bruch $u_\iota : u_\varkappa$ das Doppelverhältnis dar, nach welchem die Kante $O_\iota O_\varkappa$ des Tetraeders durch die Ebene $(u_1 \ldots u_4)$ und die Einheitsebene geteilt wird.

6. Die Verhältnisse der Koordinaten $x_1 \ldots x_4$ können für jeden eigentlichen und uneigentlichen Punkt in doppelter Weise gefunden werden, nämlich erstens, indem man von der oben (§ 5, 1) gegebenen Definition ausgeht, und zweitens, indem man neben dem Koordinaten-Tetraeder auch den Einheitspunkt zu Grunde legt. Um nach der ersten Methode für einen Punkt P, der nicht in der Ebene $x_4 = 0$ liegt, das Verhältnis $x_1 : x_4$ zu finden, legt man durch die Axe $O_2 O_3$ die Ebene, welche den Punkt P enthält. Das Schnittverhältnis, nach welchem der von den Ebenen $x_1 = 0$ und $x_4 = 0$ begrenzte Keil durch die neue Ebene geteilt wird, sei gleich σ_1.

In gleicher Weise möge der Keil $(O_1 O_3 O_4, O_1 O_2 O_3)$ durch die Ebene $O_1 O_3 P$ nach dem Verhältnisse σ_2 und der Keil $(O_1 O_2 O_4, O_1 O_2 O_3)$ durch $O_1 O_2 P$ nach dem Verhältnisse σ_3 geteilt werden. Ferner sei

$$\frac{\mu_1 \sigma_1}{\mu_4} = \tau_1,\ \frac{\mu_2 \sigma_2}{\mu_4} = \tau_2,\ \frac{\mu_3 \sigma_3}{\mu_4} = \tau_3.$$

Dann ist:

$$\frac{x_1}{x_4} = \tau_1, \quad \frac{x_2}{x_4} = \tau_2, \quad \frac{x_3}{x_4} = \tau_3.$$

Jetzt wird aber auch, wie man leicht sieht, der Keil

$$(O_2O_3O_4,\ O_1O_3O_4)$$

durch die Ebene O_3O_4P nach dem Verhältnisse $\sigma_1 : \sigma_2$ geteilt; somit ist:

$$x_1 : x_2 = \tau_1 : \tau_2, \quad x_1 : x_3 = \tau_1 : \tau_3, \quad x_2 : x_3 = \tau_2 : \tau_3.$$

Sollte der Punkt in der Ebene $x_4 = 0$, aber etwa nicht in der Ebene $x_3 = 0$ liegen, so bestimme man in gleicher Weise die Verhältnisse $x_1 : x_3$ und $x_2 : x_3$.

Die zweite Methode benutzt den Einheitspunkt. Man legt durch eine jede Kante die beiden Ebenen, von denen die eine nach dem zu bestimmenden Punkte, die andere nach dem Einheitspunkte geht; das Doppelverhältnis zwischen diesen beiden Ebenen und den durch die Kante gehenden Seiten des Tetraeders stellt das Verhältnis der entsprechenden Koordinaten dar. Auch jetzt sind von den sechs auf diese Weise erhaltenen Verhältnissen nur drei von einander unabhängig.

7. Umgekehrt läfst sich nach beiden Methoden ein einziger Punkt finden, dessen Koordinaten gegebene Verhältnisse bilden, für den also bei gegebenen Werten von ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 die Beziehungen gelten: $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4$. Beidemale erhalten wir sechs Ebenen, auf denen der gesuchte Punkt liegen mufs, und diese Ebenen gehen regelmäfsig durch einen eigentlichen oder uneigentlichen Punkt hindurch.

Die Lage eines jeden Punktes ist also durch die Verhältnisse seiner Koordinaten eindeutig bestimmt.

8. Dasselbe gilt von den Ebenen des Raumes. Die Verhältnisse der Koordinaten $u_1 \ldots u_4$ liefern uns auf jeder Kante des Koordinaten-Tetraeders einen Punkt der Ebene, mag man von der ursprünglichen Definition der Gröfsen $u_1 \ldots u_4$ ausgehen oder den in 5. bewiesenen Satz benutzen. Da

$$u_1 = \nu_1 r_1, \quad u_2 = \nu_2 r_2, \quad u_3 = \nu_3 r_3, \quad u_4 = \nu_4 r_4$$

ist, der Bruch $r_1 : r_2$ uns aber das Verhältnis angiebt, nach welchem die Strecke O_1O_2 in ihrem Schnittpunkte mit der gegebenen Ebene geteilt wird, so ist dieser Schnittpunkt bekannt, sobald die Koefficienten ν_1, ν_2 und das Verhältnis $u_1 : u_2$ gegeben sind.

Fassen wir aber den Quotienten $u_1 : u_2$ als das Doppelverhältnis auf, in welchem die Endpunkte der Kante O_1O_2 zu ihren Schnittpunkten mit der zu bestimmenden Ebene und der Einheitsebene stehen, so erhalten wir wiederum einen bestimmten Schnittpunkt. Die sechs auf diese Weise gefundenen Punkte liegen aber in einer Ebene.

9. Hiernach ist es angebracht, bei den Untersuchungen nur die Verhältnisse der Koordinaten zu benutzen. Dann müssen aber auch alle vorkommenden Gleichungen nicht von den Koordinaten selbst, sondern nur von ihren Verhältnissen abhängig sein; sie dürfen sich also nicht ändern, wenn man die vier Variabeln mit derselben Gröfse multipliziert. Eine Gleichung zwischen veränderlichen Gröfsen, welche ungeändert bleibt, wenn man alle Veränderlichen mit einer beliebigen Gröfse ϱ multipliziert, heifst eine homogene Gleichung.

Eine homogene Gleichung zwischen den vier Variabeln x_1, x_2, x_3, x_4 kann für alle von null verschiedenen Werte von x_4 in eine Gleichung zwischen den drei Variabeln $x_1 : x_4$, $x_2 : x_4$, $x_3 : x_4$ verwandelt werden. Man könnte daher versucht sein, statt der vier Variabeln $x_1 \ldots x_4$ die drei neuen Variabeln einzuführen. Da aber die hierfür erhaltene Gleichung nicht unmittelbar für die Punkte der Ebene $x_4 = 0$ angewandt werden kann, ist es meistens besser, die vier Variabeln beizubehalten.

10. Dementsprechend sehen wir in allen folgenden Untersuchungen von den wahren Werten der Koordinaten ab und beachten nur ihre Verhältnisse. Unter dem Zeichen (x_1, x_2, x_3, x_4) verstehen wir den Punkt, dessen Koordinaten sich wie die Gröfsen x_1, x_2, x_3, x_4 verhalten. Die in § 5, 1 bestimmten Gröfsen x_1, x_2, x_3, x_4 dürfen daher noch mit einer ganz beliebigen, von null verschiedenen Gröfse ϱ multipliziert werden. Mit andern Worten, wir verlangen nicht, dafs die vier dort eingeführten Koefficienten konstante Werte haben, sondern nur, dafs diese Gröfsen in einem konstanten Verhältnisse zu einander stehen.

Ebenso wollen wir bei Ebenenkoordinaten nicht die wahren Werte, sondern nur die Verhältnisse in Betracht ziehen. Das Symbol (u_1, u_2, u_3, u_4) zur Bestimmung einer Ebene soll nur angeben, dafs die Koordinaten im Verhältnisse $u_1 : u_2 : u_3 : u_4$ stehen. Statt demnach, wie wir in § 5, 1 gefordert haben, die

Senkrechten r_1, r_2, r_3, r_4 mit festen Konstanten ν_1, ν_2, ν_3, ν_4 zu multiplizieren, brauchen wir von jetzt an nur zu verlangen, daſs diese Koefficienten feste Verhältnisse zu einander haben.

Bei den neuen Bestimmungen ändern sich die Bedingungen dafür nicht, daſs die Punkt- und die Ebenen-Koordinaten zusammengehören, weil die Gleichungen

$$\mu_1\nu_1 h_1 = \mu_2\nu_2 h_2 = \mu_3\nu_3 h_3 = \mu_4\nu_4 h_4$$

sowohl in den $\mu_1 \ldots \mu_4$, als in den $\nu_1 \ldots \nu_4$ homogen sind.

Indem wir diese Festsetzungen festhalten, dürfen wir nur solche Gleichungen benutzen, welche sowohl in den Punkt- als in den Ebenen-Koordinaten homogen sind; aus diesem Grunde nennen wir diese Koordinaten selbst homogene Koordinaten.

Übungen:

1) In welcher Beziehung stehen die in § 5, 1 eingeführten Koefficienten $\mu_1 \ldots \mu_4$ und $\nu_1 \ldots \nu_4$ zu einander, wenn der Einheitspunkt

a) der Mittelpunkt der dem Tetraeder eingeschriebenen Kugel und

b) der Schwerpunkt des Tetraeders ist?

2) Um die Lage eines Punktes P zu bestimmen, setze man fest, daſs die vier Strecken $x_1 = PP_1$, $x_2 = PP_2$, $x_3 = PP_3$, $x_4 = PP_4$ unter demselben Winkel gegen die Koordinatenebenen geneigt sind.

a) Wie findet man den Punkt, wenn die Winkel selbst unbekannt sind?

b) Was bleibt ungeändert, wenn der Winkel sich von Punkt zu Punkt willkürlich ändert?

c) Welches ist der Einheitspunkt bei dieser Festsetzung?

3) a) Welche Änderungen gehen mit den Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 vor sich, wenn man das Koordinaten-Tetraeder ungeändert läſst, aber dem Einheitspunkte eine beliebige andere Lage giebt?

b) Wie ändert sich die Gleichung $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$ bei bloſser Änderung des Einheitspunktes?

c) Welche Änderung erleidet hierbei die quadratische Gleichung $\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa = 0$? Wie wird hierdurch die Determinante aus den Koefficienten, wie die Unterdeterminante $\Sigma \pm a_{11}a_{22}a_{33}$, wie die Unterdeterminante $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ geändert?

4) a) Welche Bedingungen müssen zwischen den Koefficienten a_1, a_2, a_3, a_4 und b_1, b_2, b_3, b_4 bestehen, damit die Formen $a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2$ und $b_1y_1^2 + b_2y_2^2 + b_3y_3^2 + b_4x_4^2$ durch bloſse Änderung des Einheitspunktes in einander übergeführt werden können?

b) Wann kann die Form $a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2$ auf die Form $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$, wann auf die Form $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$ gebracht werden?

5) a) Es seien g_1, g_2, g_3, g_4 die Koordinaten der unendlichfernen Ebene; man soll die Bedingung angeben, unter welcher der Punkt $(x_1 \ldots x_4)$ ein uneigentlicher Punkt ist.

b) Welchen Bedingungen genügen jetzt die Koordinaten der auf der Ebene $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$ gelegenen unendlichfernen Geraden?

c) Man bestimme die Koordinaten für den unendlichfernen Punkt der Schnittlinie der beiden Ebenen

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0 \text{ und}$$
$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 = 0.$$

d) Welche Gleichung hat die Ebene, welche durch den Punkt (x′) parallel zur Ebene $a_1x_1 + \ldots + a_4x_4 = 0$ gelegt werden kann?

e) Man gebe die Gleichungen für diejenige gerade Linie an, welche parallel zu der Schnittlinie der in c) angegebenen Ebenen durch den Punkt (x′) gezogen werden kann.

§ 8.

Specielle Koordinatensysteme.

1. Wir haben im zweiten Paragraphen angenommen, daſs die vier Eckpunkte des Koordinaten-Tetraeders eigentliche Punkte sind; nur bei dieser Annahme dürfen wir die Koordinaten eines Punktes durch die auf die Seiten des Tetraeders gefällten Senkrechten und die Koordinaten einer Ebene durch die auf dieselbe von den Eckpunkten aus gefällten Senkrechten, unter Benutzung von beliebig gewählten Koefficienten, bestimmen. Dagegen bleibt die Definition durch Doppelverhältnisse auch gültig, wenn einer oder mehrere Eckpunkte des Tetraeders im Unendlichfernen liegen. Um das zu erkennen, brauchen wir nur die Ergebnisse des § 6

zu berücksichtigen. Vielfach nehmen aber hierbei die Verhältnisse der Koordinaten eine einfachere Bedeutung an, als in dem Falle, dafs alle Eckpunkte im Endlichen liegen. Aus diesem Grunde wollen wir auf solche Koordinatensysteme etwas genauer eingehen.

2. Zunächst nehmen wir an, nur ein Eckpunkt des Tetraeders falle ins Unendlichferne. Es sollen demnach die Punkte O_1, O_2, O_3 eigentliche Punkte sein; dagegen soll der Punkt O_4 der unendlichferne Punkt der drei parallelen Axen O_1X, O_2Y, O_3Z sein. Um den Einheitspunkt passend zu wählen, tragen wir auf den Axen O_1X, O_2Y, O_3Z in negativer Richtung der Reihe nach die Strecken O_1E_1, O_2E_2, O_3E_3 ab, von denen jede gleich der Längeneinheit ist. Jetzt lege man durch O_2, O_3, E_1, sowie durch O_3, O_1, E_2 und durch O_1, O_2, E_3 je eine Ebene und wähle den Schnittpunkt E dieser drei Ebenen zum Einheitspunkte. Durch den Punkt P und jede der drei Geraden O_2O_3, O_3O_1 und O_1O_2 lege man eine Ebene; die erste von diesen schneide O_1X in P_1, die zweite schneide O_2Y in P_2, die dritte schneide O_3Z in P_3. Alsdann ist der Bruch $x_1 : x_4$ gleich dem Doppelverhältnisse $(O_2O_3 : O_4O_1PE)$, oder weil O_4 der unendlichferne Punkt der Geraden O_1X ist und diese Gerade von der Ebene O_2O_3P in P_1 und von der Ebene O_2O_3E in E_1 geschnitten wird, gleich dem Bruch $O_1E_1 : O_1P_1$. Ebenso ist

$$x_2 : x_4 = O_2E_2 : O_2P_2 \text{ und } x_3 : x_4 = O_3E_3 : O_3P_3.$$

Da aber die Strecken O_1E_1, O_2E_2 und O_3E_3 gleich der negativen Längeneinheit sind, so wird

$$\frac{x_1}{x_4} = \frac{-1}{O_1P_1}, \quad \frac{x_2}{x_4} = \frac{-1}{O_2P_2}, \quad \frac{x_3}{x_4} = \frac{-1}{O_3P_3}.$$

Die reciproken Abschnitte, welche die durch den zu bestimmenden Punkt und je eine der drei Geraden O_2O_3, O_3O_1 und O_1O_2 gelegten Ebenen auf den Axen O_1X, O_2Y und O_3Z abtrennen, können als Koordinaten des Punktes angesehen werden; in diesen Gröfsen ist die Gleichung einer jeden Ebene vom ersten Grade.

Nur für die Punkte der Ebene $O_1O_2O_3$ mufs man die Verhältnisse $x_1 : x_2$, $x_3 : x_1$, $x_2 : x_3$ berücksichtigen; über ihre Bedeutung brauchen wir nichts mehr zu sagen.

3. Besonderes Interesse gewähren in diesem Falle die Koordinaten einer Ebene. Der angegebenen Wahl des Einheitspunktes entspricht es, die Einheitsebene so zu wählen, dafs sie die Axen O_1X, O_2Y, O_3Z in drei Punkten E_1, E_2, E_3 trifft, für welche die Strecken O_1E_1, O_2E_2, O_3E_3 gleich der positiven Längeneinheit sind. Wenn jetzt die zu bestimmende Ebene diese Axen bzw. in den Punkten Γ_1, Γ_2, Γ_3 schneidet, so ist:

$$\frac{u_1}{u_4} = (O_1O_4\Gamma_1E_1) = \frac{O_1\Gamma_1}{\Gamma_1O_4} : \frac{O_1E_1}{E_1O_4} = \frac{O_1\Gamma_1}{O_1E_1} : \frac{\Gamma_1O_4}{E_1O_4}.$$

Der letzte Doppelbruch hat aber, weil der Punkt O_4 ein unendlichferner Punkt und die Strecke O_1E_1 gleich der Einheit ist, den Wert $O_1\Gamma_1$. Ebenso ist $u_2 : u_4 = O_2\Gamma_2$, $u_3 : u_4 = O_3\Gamma_3$. Man kann also jede Ebene durch die Abschnitte bestimmen, welche durch dieselbe auf den Axen O_1X, O_2Y, O_3Z abgeschnitten werden. Da diese Art der Bestimmung einen speciellen Fall unserer Tetraeder-Koordinaten darstellt, so ist bei Benutzung dieser Gröfsen die Gleichung eines jeden Punktes vom ersten Grade. (Schweringsche Koordinaten.)

Diejenigen Ebenen, welche zu der Richtung O_1X parallel sind, werden durch die angegebenen Gröfsen nicht bestimmt; für solche Ebenen mufs man die Verhältnisse $u_1 : u_2 : u_3$ berücksichtigen.

4. Es ist nicht nötig, die geometrische Bedeutung der Koordinaten für den Fall zu ermitteln, dafs zwei Eckpunkte des Koordinaten-Tetraeders ins Unendlichferne fallen. Von praktischer Wichtigkeit ist nur noch der Fall, dafs die drei Punkte O_1, O_2, O_3 uneigentliche Punkte sind und nur die Kanten O_4X ($= O_4O_1$), O_4Y ($= O_4O_2$) und O_4Z ($= O_4O_3$) im Endlichen liegen. In diesem Falle nennen wir das Dreikant ($O_4 : XYZ$) das Koordinaten-Dreikant und fassen jede Ebene, welche zwei seiner Kanten verbindet, als die der dritten Kante gegenüberliegende Koordinatenebene auf. Wir wählen den Einheitspunkt so, dafs jede Strecke, welche von ihm aus parallel einer Axe bis zur gegenüberliegenden Koordinatenebene gezogen wird, der positiven Längeneinheit gleich ist. Somit schneidet jede Ebene, welche durch den Einheitspunkt parallel zu einer Koordinatenebene gelegt wird, von der nicht in dieser Ebene enthaltenen Axe eine Strecke gleich der positiven Längeneinheit ab. Schneidet also die durch E parallel zu O_4YZ

gelegte Ebene die Axe O_4X in E_1, die parallel zu O_4X gelegte Ebene die O_4Y in E_2, und die parallel zu O_4XY gelegte Ebene die O_4Z in E_3, so ist $O_4E_1 = O_4E_2 = O_4E_3 = +1$.

Um die Koordinaten eines Punktes P anzugeben, lege man durch ihn die Ebenen, welche zu den Koordinatenebenen parallel sind, und bestimme jedesmal den Schnittpunkt mit der gegenüberliegenden Axe; die Ebene parallel zu O_4YZ möge O_4X in P_1, die Ebene parallel zu O_4ZX möge O_4Y in P_2 und die Ebene parallel zu O_4XY möge O_4Z in P_3 schneiden. Nennen wir x_1, x_2, x_3, x_4 die Koordinaten des Punktes P, welche unserer Wahl des Tetraeders und des Einheitspunktes entsprechen, so ist

$$x_1 : x_4 = (O_2O_3 : O_4O_1PE).$$

Nun ist O_2O_3 die unendlichferne Gerade der Ebene O_4YZ; daher sind die Ebenen O_2O_3P und O_2O_3E zur Ebene O_4YZ parallel, während die Ebene $O_2O_3O_1$ die unendlichferne Ebene ist. Somit ist:

$$\frac{x_1}{x_4} = (O_4O_1P_1E_1) = \frac{O_4P_1}{P_1O_1} : \frac{O_4E_1}{E_1O_1} = \frac{O_4P_1}{O_4E_1} : \frac{P_1O_1}{E_1O_1}$$

oder

$$x_1 : x_4 = O_4P_1,$$

weil O_1 der unendlichferne Punkt der Gerade O_4X und $O_4E_1 = 1$ ist.

Setzen wir $O_4P_1 = x$, $O_4P_2 = y$, $O_4P_3 = z$, so ist

$$x_1 : x_4 = x, \quad x_2 : x_4 = y, \quad x_3 : x_4 = z.$$

Hiernach sind die Cartesischen Koordinaten ein specieller Fall der Tetraeder-Koordinaten; man gelangt zu ihnen, indem man drei Eckpunkte des Tetraeders in der unendlichfernen Ebene annimmt und den Einheitspunkt in einer bestimmten Weise wählt. Statt die Gröfsen x, y, z durch die Abschnitte auf den Axen zu bestimmen, kann man sie auch gleich den Strecken setzen, welche vom Punkte aus parallel zu je einer Axe bis zur gegenüberliegenden Koordinatenebene gezogen sind.

5. Die Gröfsen x, y, z werden für unendlichferne Punkte selbst unendlich; dagegen können ihre Quotienten, welche mit den Brüchen $x_1 : x_2 : x_3$ identisch sind, durch endliche Gröfsen dargestellt werden. Die Verhältnisse der Gröfsen x, y, z bestimmen eine gerade Linie, welche durch den Punkt O_4 geht. Demnach kommt die Festsetzung der Verhältnisse $x : y : z$ in

Verbindung mit der Forderung $x_4 = 0$ darauf hinaus, den unendlichfernen Punkt einer durch O_4 gehenden Geraden zu bestimmen. Da man jeden unendlichfernen Punkt mit dem Punkte O_4 durch eine gerade Linie verbinden kann, so gelangt man durch die angegebene Festsetzung zu allen unendlichfernen Punkten.

6. Bei der getroffenen Wahl des Einheitspunktes schneidet die Einheitsebene die drei Axen O_4X, O_4Y, O_4Z in drei Punkten E_1, E_2, E_3, für welche $O_4E_1 = O_4E_2 = O_4E_3 = -1$ ist. Wenn jetzt die zu bestimmende Ebene dieselben Axen der Reihe nach in Γ_1, Γ_2, Γ_3 schneidet, so ist

$$\frac{u_1}{u_4} = (O_1O_4\Gamma_1E_1) = \frac{O_1\Gamma_1}{\Gamma_1O_4} : \frac{O_1E_1}{E_1O_4} = \frac{E_1O_4}{\Gamma_1O_4} : \frac{O_1E_1}{O_1\Gamma_1}.$$

Dieser Bruch hat aber den Wert $-1 : O_4\Gamma_1$, weil der Punkt O_1 der unendlichferne Punkt der Geraden O_4X und die Strecke $O_4E_1 = -1$ ist.

Setzen wir $u_1 : u_4 = -u$, $u_2 : u_4 = -v$, $u_3 : u_4 = -w$, so stellen die Gröfsen u, v, w die reciproken Strecken dar, welche auf den Axen durch die Ebene vom Anfangspunkte aus abgeschnitten werden. In diesen Gröfsen, den Plückerschen Koordinaten einer Ebene, ist die Gleichung eines jeden Punktes linear.

7. Die angegebene Bestimmung einer Ebene versagt für jede Ebene, welche durch den Anfangspunkt O_4 geht. Für eine solche Ebene mufs man $u_4 = 0$ setzen, und dann genügen die Verhältnisse $u_1 : u_2 : u_3$, welche wiederum durch endliche Gröfsen ausgedrückt werden können, um die Ebene eindeutig zu bestimmen. So ist der Bruch $u_1 : u_2$ für jedes Koordinatensystem gleich dem Doppelverhältnisse, nach welchem die Strecke O_1O_2 durch ihre Schnittpunkte mit der zu bestimmenden und der Einheitsebene geteilt wird. Da in unserm Falle die Kante O_1O_2 die unendlichferne Gerade der Ebene O_4XY ist, so ersetzt man dies Doppelverhältnis durch das von vier Geraden, welche von einem beliebigen Punkte aus nach den vier Punkten der Kante gezogen werden können. Zu diesem Punkte wählen wir den Punkt O_4. Wir nehmen an, die zu bestimmende Ebene gehe durch O_4 hindurch und schneide die Ebene O_4XY in einer Geraden O_4M_3, die Ebene O_4ZX in O_4M_2 und die Ebene O_4YZ in O_4M_1. Zu der Schnittlinie der Einheitsebene mit der Ebene O_4YZ werde

durch O_4 die Parallele O_4N_1 gezogen, und in entsprechender Weise mögen die Geraden O_4N_2 und O_4N_3 bestimmt werden. Dann ist für eine solche Ebene:

$$u_1 : u_2 = (O_4 : XYM_3N_3),\ u_3 : u_1 = (O_4 : ZXM_2N_2),$$
$$u_2 : u_3 = (O_4 : YZM_1N_1).$$

8. Wenn man also die Möglichkeit haben will, unter Benutzung des angegebenen Koordinatensystems alle Ebenen des Raumes darzustellen, so kann man die Verhältnisse der vier Gröfsen u_1, u_2, u_3, u_4 nicht entbehren. Es fragt sich demnach, ob man nicht auch diesen vier Gröfsen eine selbständige und allgemein gültige Bedeutung beizulegen vermag. Um diese Frage zu beantworten, gehen wir wieder von einer Ebene aus, welche nicht durch den Punkt O_4 geht, welche also die Axen O_4X, O_4Y, O_4Z der Reihe nach in den drei von O_4 verschiedenen Punkten $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ schneidet. Es sei ferner ϱ der Abstand des Punktes O_4 von der Ebene; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ seien die Winkel, unter denen die Axen O_4X, O_4Y, O_4Z gegen die Ebene geneigt sind. Dann ist

$$\varrho = O_4\Gamma_1 \cdot \sin\gamma_1 = O_4\Gamma_2 \cdot \sin\gamma_2 = O_4\Gamma_3 \cdot \sin\gamma_3.$$

Daher gelten auch die Beziehungen:

$$(1)\quad \frac{u_1}{u_4} = -\frac{1}{O_4\Gamma_1} = \frac{\sin\gamma_1}{\varrho},\ \frac{u_2}{u_4} = -\frac{1}{O_4\Gamma_2} = \frac{\sin\gamma_2}{\varrho},$$
$$\frac{u_3}{u_4} = -\frac{1}{O_4\Gamma_3} = \frac{\sin\gamma_3}{\varrho},$$

wofern man die Gröfse ϱ und die Winkel $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ in der Weise wählt, dafs auch Übereinstimmung in den Vorzeichen besteht. Ist dies geschehen, so dürfen wir setzen:

$$(2)\quad u_1 = \sin\gamma_1,\ u_2 = \sin\gamma_2,\ u_3 = \sin\gamma_3,\ u_4 = \varrho.$$

Für eine Ebene, welche durch den Anfangspunkt geht, wird ϱ und damit auch u_4 gleich null; auch die Gröfsen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ behalten ihre Bedeutung bei. Hiernach ist es möglich, durch die Gröfsen u_1, u_2, u_3, u_4 jede beliebige Ebene zu bestimmen.

9. Um die Vorzeichen so zu wählen, dafs die neuen Werte der Brüche $u_1 : u_4$, $u_2 : u_4$, $u_3 : u_4$ auch in den Vorzeichen übereinstimmen, ersetzen wir die Winkel $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ durch ihre Komplementwinkel $\delta_1, \delta_2, \delta_3$. Demnach sind $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ die Winkel, welche eine beliebige auf der Ebene errichtete Senkrechte mit den Axen bildet, und es handelt sich nur darum, die Richtung festzulegen, in welcher diese Senkrechte und die Koordinatenaxen

zu nehmen sind. Zu dem Ende bezeichnen wir den einen der beiden Raumteile, in welche die zu bestimmende Ebene den Raum zerlegt, als den positiven, den andern als den negativen. Im positiven Teile ziehen wir eine Halbgerade, welche auf der Ebene senkrecht steht, und nennen δ_1, δ_2, δ_3 die Winkel, unter denen diese Halbgerade gegen die positiven Richtungen der Axen geneigt ist. Endlich geben wir der Senkrechten ϱ das positive oder negative Vorzeichen, jenachdem diese Strecke der Ebene gegenüber im positiven oder negativen Teile liegt. Alsdann setzen wir:

$$(3) \quad u_1 = \cos\delta_1,\ u_2 = \cos\delta_2,\ u_3 = \cos\delta_3,\ u_4 = \varrho.$$

Bei dieser Wahl werden die Gleichungen (1) auch in Bezug auf das Vorzeichen befriedigt.

Durch eine Vertauschung der positiven und der negativen Seite der Ebene erhalten die Gröfsen $u_1 \ldots u_4$ sämtlich das entgegengesetzte Vorzeichen. Um volle Eindeutigkeit herbeizuführen, setzt v. Lilienthal fest, dafs für jede Ebene, welche nicht zur x-Axe parallel ist, die positive Richtung dieser Axe auch im positiven Teile des Raumes liegen soll; mit andern Worten, für eine solche Ebene soll derjenige Teil dieser Axe, für den alle Werte von x hinreichend grofs sind, dem positiven Teile angehören. Bei Ebenen, welche zur x-Axe, aber nicht zur y-Axe parallel sind, soll die gleiche Forderung für die y-Axe, und bei Ebenen, welche zur Ebene XOY parallel sind, für die z-Axe erfüllt sein. Dieser Forderung entspricht es, dafs von den Gröfsen u_1, u_2, u_3 die erste nicht verschwindende ein positives Vorzeichen erhalten soll.

10. Zwischen den drei Gröfsen u_1, u_2, u_3 besteht eine gewisse Beziehung. Um zu derselben zu gelangen, kann man von der Gleichung (4) § 4, 3 (S. 25) ausgehen. Man nehme etwa an, es sei $O_4O_1 = O_4O_2 = O_4O_3 = m$, und lasse m unbegrenzt wachsen. Dann nimmt auch h_4 proportional m zu, während r_4 ungeändert bleibt. Auch die Winkel ändern sich nicht, aber die Quotienten $r_1 : h_1$, $r_2 : h_2$, $r_3 : h_3$ nähern sich festen Grenzwerten. Demnach fällt für ein unendlichgrofses m die Gröfse r_4 ganz aus und es bleibt eine Beziehung zwischen r_1, r_2, r_3, die leicht in eine Gleichung zwischen u_1, u_2, u_3 umgewandelt werden kann.

Indessen ist es nicht nötig, diesen Weg einzuschlagen. Es genügt, die Beziehung zwischen u_1, u_2, u_3 für den Fall zu kennen,

daſs die drei Axen O_4O_1, O_4O_2, O_4O_3 auf einander senkrecht stehen. Dann stellen aber die Gröſsen $u_1 = \cos\delta_1$, $u_2 = \cos\delta_2$, $u_3 = \cos\delta_3$ die Richtungscosinus für eine Gerade dar, welche auf der Ebene senkrecht steht. In den Anfängen der analytischen Geometrie wird aber bewiesen, daſs die Summe aus den Quadraten dieser drei Gröſsen gleich eins ist. Somit gilt in diesem Falle die Gleichung:

$$(4) \quad u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1.$$

Die in dieser Weise für ein rechtwinkliges Koordinatensystem bestimmten Gröſsen $u_1 \ldots u_4$ heiſsen die Hesseschen Koordinaten einer Ebene. Ihre Zusammengehörigkeit mit den rechtwinkligen Cartesischen Koordinaten x, y, z tritt besonders dadurch zu Tage, daſs der Abstand eines Punktes (x, y, z) von einer Ebene (u_1, u_2, u_3, u_4) auch den Vorzeichen nach durch die Form

$$(5) \quad u_1x + u_2y + u_3y + u_4$$

dargestellt wird.

Übungen:

1) In den Hesseschen Koordinaten kann die Gleichung einer jeden Kugel in der Form dargestellt werden:

$$au_1 + bu_2 + cu_3 + u_4 = \pm r,$$

wo a, b, c die rechtwinkligen Cartesischen Koordinaten des Mittelpunktes, r der Radius und $u_1 \ldots u_4$ die Koordinaten einer beliebigen Tangentialebene sind. Man gebe die Gleichung des Berührungspunktes der Tangentialebene ($u_1' \ldots u_4'$) an.

2) Welche Ebenen können durch die Plückerschen Koordinaten nicht dargestellt werden? Wie hat man zu verfahren, um solche Ebenen unter Anwendung dieser Bestimmungsgröſsen der Untersuchung zugänglich zu machen?

3) Man lasse zwei Eckpunkte des Koordinaten-Tetraeders in die unendlichferne Ebene fallen; speciell nehme man an, falls O_1 und O_2 die im Endlichen gelegenen, aber O_3 und O_4 die unendlichfernen Eckpunkte sind, daſs die Ebenen $O_1O_2O_3$ und $O_1O_2O_4$ auf einander und auf den Ebenen $O_1O_3O_4$ und $O_2O_3O_4$ senkrecht stehen. Endlich setze man fest, daſs die Einheitsebene jede der Axen O_1O_3, O_1O_4, O_2O_3, O_2O_4 auf der negativen Seite im Abstande gleich eins von den Punkten O_1 und O_2 treffen soll.

a) Welche Lage hat jetzt der Einheitspunkt?

b) Welche Bedeutung haben die Brüche $u_1 : u_3$, $u_2 : u_3$, $u_1 : u_4$, $u_2 : u_4$ für eine beliebige Ebene?

c) Welche Bedeutung haben die Brüche $x_1 : x_3$, $x_2 : x_3$, $x_1 : x_4$, $x_2 : x_4$ für einen eigentlichen Punkt?

§ 9.

Ebene Systeme und Strahlenbündel.

1. Um Gebilde zu untersuchen, die in einer festen Ebene liegen, hat man in der Ebene solche Koordinaten zu benutzen, welche es ermöglichen, die räumlichen Koordinaten eines jeden durch seine ebenen Koordinaten bestimmten Punktes unmittelbar anzugeben. Das gelingt am leichtesten bei Gebilden, die in einer Seite des Koordinaten-Tetraeders liegen. Will man z. B. Figuren untersuchen, die in der Ebene $x_4 = 0$ liegen, so ist es am natürlichsten, die Punkte O_1, O_2, O_3 zu Eckpunkten des Koordinatendreiecks zu wählen und den Einheitspunkt in den Punkt E_4 zu legen, in welchem die Ebene $O_1O_2O_3$ durch die Verbindungslinie des Eckpunktes O_4 mit dem Einheitspunkte E getroffen wird. Wenn wir y_1, y_2, y_3 die auf diese Weise gewonnenen Dreieckskoordinaten eines Punktes $(x_1, x_2, x_3, 0)$ der Ebene $x_4 = 0$ nennen, so ist

$$y_1 : y_2 = (O_3 : O_2O_1PE).$$

Zugleich gilt für die räumlichen Koordinaten dieses Punktes die Beziehung:

$$x_1 : x_2 = (O_3O_4 : O_2O_1PE).$$

Nun wird die Ebene $O_1O_2O_3$ von der Ebene O_3O_4P in der Geraden O_3P und von der Ebene O_3O_4E in der Geraden O_3E_4 geschnitten; daher ist

$$(O_3 : O_2O_1PE_4) = (O_3O_4 : O_2O_1PE).$$

Ähnliche Erwägungen kann man für die Doppelverhältnisse anstellen, durch welche die Brüche $y_3 : y_1$ und $y_2 : y_3$ dargestellt werden. Demnach gelten die Gleichungen:

$$(1) \quad \frac{x_2}{x_3} = \frac{y_2}{y_3}, \quad \frac{x_3}{x_1} = \frac{y_3}{y_1}, \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}.$$

Da wir bei unsern Untersuchungen nur homogene Gleichungen benutzen, bei denen es einzig auf die Verhältnisse der

Koordinaten ankommt, so dürfen wir die Koordinaten x_1, x_2, x_3 auch als die ebenen Koordinaten eines Punktes $(x_1, x_2, x_3, 0)$ der Ebene $x_4 = 0$ auffassen.

2. Um daher die Schnittlinie einer Fläche, welche durch eine homogene Gleichung $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ zwischen den räumlichen Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 bestimmt ist, mit der Ebene $x_4 = 0$ zu finden, darf man in der Gleichung der Fläche $x_4 = 0$ setzen. Indem man für diese Fläche die Gleichungen $x_4 = 0$, $\varphi(x_1, x_2, x_3, 0) = 0$ zu Grunde legt, benutzt man ein ebenes Koordinatensystem, für welches die Punkte O_1, O_2, O_3 Eckpunkte des Koordinatendreiecks und der soeben bestimmte Punkt E_4 der Einheitspunkt ist.

In ähnlicher Weise darf man für die Untersuchung der Schnittlinie der Fläche $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ mit der Ebene $x_3 = 0$ die Gleichung $\varphi(x_1, x_2, 0, x_4) = 0$ benutzen.

3. Um in entsprechender Weise eine Ebene zu untersuchen, die mit keiner Koordinatenebene zusammenfällt, kann man zwar eine Änderung der Koordinaten vornehmen und dann dieselbe Methode benutzen. Aber hierbei tritt die geometrische Bedeutung der einzelnen Koefficienten zu wenig hervor. Daher ist es weit besser, die in den Gleichungen (6) § 5, 2 angegebene Methode anzuwenden.

Sind (x'), (x''), (x''') drei beliebige Punkte, so kann man die Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 eines jeden Punktes, der mit ihnen in einer Ebene liegt, in der Form darstellen:

$$(2) \quad \varrho x_\alpha = \lambda_1 x_\alpha' + \lambda_2 x_\alpha'' + \lambda_3 x_\alpha''' \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4).$$

Um die Bedeutung der Koefficienten λ_1, λ_2, λ_3 bequem angeben zu können, bezeichnen wir die vier Punkte (x), (x'), (x''), (x''') der Reihe nach kurz mit 0, 1, 2, 3, nennen η_1, η_2, η_3 die Höhen des Dreiecks (1, 2, 3) und q_1, q_2, q_3 die Abstände des Punktes 0 von den Seiten (23), (31), (12). Wofern jetzt die Koordinaten sämtlicher Punkte aus den auf die Ebenen des Tetraeders gefällten Senkrechten durch Multiplikation mit konstanten Faktoren $\mu_1 \ldots \mu_4$ erhalten werden, ist nach § 3, 3 (S. 15)

$$\lambda_1 = \frac{q_1}{\eta_1}, \quad \lambda_2 = \frac{q_2}{\eta_2}, \quad \lambda_3 = \frac{q_3}{\eta_3}.$$

Wir dürfen aber annehmen, es seien x_1', x_2', x_3', x_4 erhalten durch Multiplikation mit $\varrho'\mu_1, \varrho'\mu_2, \varrho'\mu_3, \varrho'\mu_4$; $x_1'', x_2'', x_3'', x_4''$ durch Multiplikation mit $\varrho''\mu_1, \varrho''\mu_2, \varrho''\mu_3, \varrho''\mu_4$ und $x_1''', x_2''', x_3''', x_4'''$ durch Multiplikation mit $\varrho'''\mu_1, \varrho'''\mu_2, \varrho'''\mu_3, \varrho'''\mu_4$. In diesem Falle ist

$$(3) \quad \lambda_1 = \frac{q_1}{\varrho' \eta_1}, \quad \lambda_2 = \frac{q_2}{\varrho'' \eta_2}, \quad \lambda_3 = \frac{q_3}{\varrho''' \eta_3}$$

Die Werte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ werden also erhalten, indem man die Senkrechten, welche von dem zu bestimmenden Punkte 0 auf die Seiten des festen Dreiecks (1, 2, 3) gefällt werden können, mit konstanten Faktoren $1 : \varrho'\eta_1$, $1 : \varrho''\eta_2$, $1 : \varrho'''\eta_3$ multipliziert; sie stellen demnach allgemeine Punktkoordinaten dar. Die Quotienten je zweier Gröfsen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sind daher gewissen Doppelverhältnissen gleich, welche in der früher angegebenen Weise bestimmt werden; dabei ist derjenige Punkt zum Einheitspunkte zu nehmen, für den $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ ist.

4. Wollen wir die Schnittlinie der durch die Punkte (x'), (x''), (x''') gehenden Ebene mit der durch eine homogene Gleichung

$$(4) \quad \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

bestimmten Fläche erhalten, so müssen wir für x_1, x_2, x_3, x_4 die Werte (2) einsetzen. Dadurch geht die Gleichung (4) in eine homogene Gleichung zwischen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ über, etwa in die Gleichung:

$$\Phi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0,$$

welche in den Koordinaten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Schnittkurve darstellt.

5. Um zu den in 1. für die Ebene $x_4 = 0$ eingeführten Punktkoordinaten y_1, y_2, y_3 die zugehörigen Linienkoordinaten v_1, v_2, v_3 zu bestimmen, hat man das Koordinatendreieck $O_1O_2O_3$ beizubehalten und die Harmonikale des Punktes E_4 zur Einheitslinie zu wählen. Nun trifft die Harmonikalebene E des Punktes E die Ebene $x_4 = 0$ in derjenigen Geraden E_4, welche Harmonikale des Punktes E_4 für das Dreieck $O_1O_2O_3$ ist. Daher hat man die Schnittlinie E_4 der Einheitsebene mit der Ebene $O_1O_2O_3$ zur Einheitsgerade für die neuen Koordinaten v_1, v_2, v_3 zu wählen, falls die Bedingung dafür, dafs der Punkt (y_1, y_2, y_3) in die Gerade (v_1, v_2, v_3) fällt, die Form erhalten soll:

$$y_1v_1 + y_2v_2 + y_3v_3 = 0.$$

6. Nun werden die Axen O_1O_2, O_1O_3 und O_2O_3 von der Geraden E_4 in denselben Punkten ε_{12}, ε_{13}, ε_{23} geschnitten, wie von der Einheitsebene E. Ebenso hat eine beliebige Ebene (u) mit diesen drei Axen der Reihe nach dieselben Schnittpunkte γ_{12}, γ_{13}, γ_{23}, wie ihre Schnittlinie (v_1, v_2, v_3) mit der Ebene $x_4 = 0$. Es ist daher:

$u_1 : u_2 = (O_1O_2\gamma_{12}\varepsilon_{12})$, $v_1 : v_2 = (O_1O_2\gamma_{12}\varepsilon_{12})$ u. s. w.,

oder es bestehen die Gleichungen:

$$u_1 : u_2 : u_3 = v_1 : v_2 : v_3.$$

Da es uns bei unsern Untersuchungen nur auf die Verhältnisse und nicht auf die wahren Werte der Koordinaten ankommt, so dürfen wir u_1, u_2, u_3 auch als die Koordinaten derjenigen Geraden auffassen, in welcher die Ebene (u_1, u_2, u_3, u_4) von der Ebene $O_1O_2O_3$ geschnitten wird.

7. Bei dieser Auffassung der Gröfsen u_1, u_2, u_3 stellt die homogene Gleichung zwischen ihnen

$$(5) \quad \Phi(u_1, u_2, u_3) = 0$$

die Bedingung dafür dar, dafs die Gerade (u_1, u_2, u_3) eine gewisse ebene Kurve berührt, die in der Ebene $x_4 = 0$ gelegen ist; die Gleichung (5) ist die Gleichung dieser Kurve in Linienkoordinaten. Wenn speciell diese Gleichung homogen vom m^{ten} Grade ist, so gehen durch jeden Punkt der Ebene im allgemeinen m Tangenten der Kurve; diese ist also von der m^{ten} Klasse.

Mit jeder Geraden (u_1, u_2, u_3) dieser Ebene stellen wir eine Ebene (u_1, u_2, u_3, u_4) zusammen, für welche die drei ersten Koordinaten je denselben Wert haben. Dann wissen wir, dafs jede solche Ebene (u_1, u_2, u_3, u_4) durch die Gerade (u_1, u_2, u_3) hindurchgeht, und dafs umgekehrt jede beliebige, durch die Gerade (u_1, u_2, u_3) hindurchgehende Ebene nach passender Wahl von u_4 durch das Quadrupel (u_1, u_2, u_3, u_4) dargestellt wird. Jede Ebene, deren Koordinaten der Gleichung (5) genügen, geht also durch eine Tangente der ebenen Kurve hindurch.

Wir sagen, eine Ebene berühre eine ebene Kurve, wofern sie durch eine ihrer Tangenten hindurchgeht. Hiernach berühren alle Ebenen, deren Koordinaten der Gleichung (5) genügen, diejenige ebene Kurve, deren Gleichung in Linienkoordinaten dieselbe Form hat.

8. Die vorstehende Entwicklung läfst eine Erweiterung zu.

Wir wollen annehmen, die Funktion $F(u_1, u_2, u_3, u_4)$ könne auf die Form $\Psi(w_1, w_2, w_3)$ gebracht werden, wo w_1, w_2, w_3 homogene lineare Funktionen von u_1, u_2, u_3, u_4 sind; es sei demnach:

$$6)\quad F(u_1, u_2, u_3, u_4) = \Psi(w_1, w_2, w_3),$$
$$w_1 = \Sigma \mu_{1x} u_x,\quad w_2 = \Sigma \mu_{2x} u_x,\quad w_3 = \Sigma \mu_{3x} u_x.$$

In diesem Falle kann man nach Hinzunahme einer beliebigen weiteren Funktion w_4 von $u_1 \ldots u_4$ die neuen Gröfsen w_1, w_2, w_3, w_4 zu Koordinaten wählen. Die drei ersten Eckpunkte des hierbei benutzten Tetraeders fallen der Reihe nach mit den Punkten zusammen, deren Gleichungen sind:

$$\Sigma \mu_{1x} u_x = 0,\quad \Sigma \mu_{2x} u_x = 0,\quad \Sigma \mu_{3x} u_x = 0.$$

In der durch diese drei Punkte gehenden Ebene dürfen wir die Gröfsen w_1, w_2, w_3 als Linienkoordinaten auffassen; dabei stellt die Gleichung $\Psi(w_1, w_2, w_3) = 0$ eine ebene Kurve dar. Diese wird von jeder Ebene (w_1, w_2, w_3, w_4) berührt, welche durch eine Tangente der Kurve hindurchgeht, also von jeder Ebene, für welche die Koordinaten $w_1 \ldots w_4$ der Gleichung $\Psi(w_1, w_2, w_3) = 0$ und somit die Koordinaten u_1, u_2, u_3, u_4 der Gleichung $F(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0$ genügen.

Liegt umgekehrt eine ebene Kurve vor, so wählt man drei in ihrer Ebene gelegene Punkte zu den drei ersten Eckpunkten $w_1 = 0$, $w_2 = 0$, $w_3 = 0$ eines Koordinaten-Tetraeders, wobei die vierte Koordinate mit w_4 bezeichnet werden soll. Die Gleichung, der alle Tangentialebenen dieser Kurve genügen sollen, kann die Variabele w_4 nicht enthalten; sie mufs daher eine blofse Funktion von w_1, w_2, w_3 sein und somit in beliebigen Koordinaten u_1, u_2, u_3, u_4 durch drei lineare Formen darstellbar sein.

9. Die Gesamtheit der Geraden und Ebenen, welche durch einen festen Punkt gehen, nennt man einen Strahlenbündel; den festen Punkt, durch welchen alle seine Strahlen und Ebenen hindurchgehen, bezeichnet man als den Mittelpunkt oder den Scheitel des Bündels. Um einen Strahlenbündel analytisch zu untersuchen, kann man etwa den Eckpunkt O_4 des Koordinaten-Tetraeders mit dem Mittelpunkte zusammenfallen lassen und nur solche Gleichungen zwischen den Punktkoordinaten in Betracht ziehen, in denen die Variabele x_4 nicht vorkommt. Nun hat jeder Punkt auf der Verbindungslinie des Punktes (0, 0, 0, 1)

mit dem Punkte $(x_1', x_2', x_3', 0)$ bei passend bestimmtem Werte von μ die Koordinaten (x_1', x_2', x_3', μ); durch die Verhältnisse $x_1' : x_2' : x_3'$ ist uns somit eine Gerade, welche durch den Punkt (0, 0, 0, 1) hindurchgeht, oder ein Strahl des Bündels gegeben. Ebenso stellt die Gleichung $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ bei beliebigen Koefficienten a_1, a_2, a_3 eine Ebene dar, welche dem Bündel angehört.

10. Um jetzt die Bedeutung einer beliebigen Gleichung

$$(7) \quad f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

zu erkennen, welche nur die Variabeln x_1, x_2, x_3 enthält, wollen wir sie mit der Gleichung $x_4 = 0$ zusammenstellen. Die Verbindung der Gleichungen

$$(8) \quad x_4 = 0, \; f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

stellt aber nach den obigen Darlegungen eine in der Ebene $O_1O_2O_3$ gelegene Kurve dar. Wenn ein Punkt $(x_1', x_2', x_3', 0)$ dieser Kurve angehört, so wird die Gleichung (7) auch für die Koordinaten (x_1', x_2', x_3', μ) bei beliebigem Werte von μ befriedigt. Der Fläche (7) gehört jeder Punkt auf der Verbindungslinie des Punktes (0, 0, 0, 1) mit einem beliebigen Punkte der Kurve (8) an; sie enthält alle geraden Linien, welche vom Eckpunkte O_4 aus nach den Punkten der Kurve gezogen werden können. Alle diese geraden Linien sind Strahlen des Bündels, welches seinen Scheitel im Punkte O_4 hat.

11. Will man dem Mittelpunkte des Strahlenbündels eine beliebige Lage geben, so ist es am besten, Ebenenkoordinaten zu benutzen. Es seien (u'), (u''), (u''') drei beliebige Ebenen des Bündels. Die Koordinaten $(u_1 \ldots u_4)$ einer beliebigen Ebene desselben lassen sich unter Benutzung von drei Parametern μ_1, μ_2, μ_3 vermittelst der Gleichungen darstellen:

$$(9) \quad u_\alpha = \mu_1 u_\alpha' + \mu_2 u_\alpha'' + \mu_3 u_\alpha'''$$
$$(\alpha = 1, 2, 3, 4).$$

Man kann daher die Parameter μ_1, μ_2, μ_3 als die Koordinaten der entsprechenden Ebene auffassen. Um die geometrische Bedeutung dieser Koefficienten kennen zu lernen, beachte man den Schnitt der Ebene (9) mit einer Ebene des Koordinaten-Tetraeders, in welcher der Scheitel des Bündels nicht liegt. Dadurch gelangen wir zu folgendem Resultate. Die drei Ebenen,

welche den Werten (1, 0, 0), (0, 1, 0) und (0, 0, 1) von μ_1, μ_2, μ_3 entsprechen, bilden ein Dreikant, dessen Kanten der Reihe nach mit I, II, III bezeichnet werden sollen. Die Ebene, für welche $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ ist, schneide die Ebene (I II) in einem Strahle e_{12}, die Ebene (I III) in e_{13} und die Ebene (II III) in e_{23}. Ebenso möge eine beliebige Ebene (μ_1, μ_2, μ_3) des Bündels die drei genannten Ebenen der Reihe nach in l_{12}, l_{13}, l_{23} schneiden. Dann ist:

$$\mu_1 : \mu_2 = (\text{I II } l_{12}\, e_{12}),\ \mu_1 : \mu_3 = (\text{I III } l_{13}\, e_{13}),$$
$$\mu_2 : \mu_3 = (\text{II III } l_{23}\, e_{23}).$$

Übungen:

1) Man untersuche die Schnittlinie der Fläche

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_1x_4 + 4x_3x_4 = 0$$

a) mit jeder der vier Koordinatenebenen,

b) mit der Ebene, welche durch die Punkte (1, 1, 1, — 1), (1, — 1, 1, — 1), (2, — 4, 1, 0) gelegt werden kann.

2) Um einen Strahlenbündel zu bestimmen, lasse man von einem Scheitel drei zu einander senkrechte Strahlen ausgehen und bezeichne die Cosinus der Winkel, welche ein beliebiger Strahl mit ihnen bildet, durch λ_1, λ_2, λ_3.

a) Welche Beziehung besteht zwischen diesen drei Gröfsen?

b) Welchen Winkel bilden die zwei Strahlen $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ und $(\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3')$ mit einander?

c) Welches ist der Einheitsstrahl?

d) Welche Strahlen genügen der Gleichung

$$a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + a_3\lambda_3 = 0$$

bei konstanten Werten von a_1, a_2, a_3?

e) Welches ist die Einheitsebene dieses Systems?

f) In welcher Beziehung steht die Ebene, deren Koordinaten a_1, a_2, a_3 sind, zu dem Strahle, für den $\lambda_1 = a_1$, $\lambda_2 = a_2$, $\lambda_3 = a_3$ ist?

g) Welche Strahlen genügen der Gleichung: $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \lambda_3^2$?

h) Für welche Strahlen ist $\lambda_3 = 0$?

i) Welche Ebene wird durch die Gleichung dargestellt: $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_3$?

3) Indem man um den Scheitel eines Strahlenbündels als Mittelpunkt eine Kugel beschreibt und jeder vom Mittelpunkte ausgehenden Halbgeraden ihren Schnittpunkt, jeder Ebene des

Bündels ihre Schnittlinie mit der Kugel zuordnet, kann man die Sätze über den Strahlenbündel unmittelbar auf die Kugel übertragen. Dabei wird das Doppelverhältnis von vier Punkten eines Hauptkreises und von vier Hauptkreisen eines Büschels, dem § 1 entsprechend, durch die Verhältnisse der Sinus definiert. Für die analytische Behandlung kann man den Eckpunkt O_4 des Koordinaten-Tetraeders in den Mittelpunkt der Kugel legen; dann wird durch das Verhältnis von x_1, x_2, x_3 ein Punkt der Kugel und sein Gegenpunkt bezeichnet, während jede homogene lineare Gleichung zwischen diesen Gröfsen einen Hauptkreis darstellt.

Hiernach beweise man folgende Sätze.

a) Wenn man die Seiten eines sphärischen Dreiecks durch einen Hauptkreis schneidet, auf jeder Seite zum Schnittpunkte den vierten harmonischen Punkt konstruiert und die so erhaltenen Punkte jedesmal mit dem gegenüberliegenden Eckpunkte verbindet, so gehen die drei Hauptkreise durch einen Punkt.

b) Die drei Hauptkreise, durch welche die Eckpunkte eines sphärischen Dreiecks mit einem beliebigen Punkte der Kugelfläche verbunden werden, schneiden die gegenüberliegenden Seiten so, dafs die drei zu ihnen je in Bezug auf die Endpunkte der Seite harmonisch zugeordneten Punkte auf einem Hauptkreise liegen.

c) Wenn der eine von vier harmonischen Punkten auf einem Hauptkreise einer Kugel in der Mitte zwischen den Punkten des anderen Paares liegt, so hat er von dem zugeordneten harmonischen Punkte den sphärischen Abstand $\frac{1}{2}\pi$.

d) Wenn umgekehrt die Punkte des einen Paares von vier harmonischen Punkten auf einer Kugel von einander die sphärische Entfernung $\frac{1}{2}\pi$ haben, so liegt der eine dieser Punkte in der Mitte zwischen den Punkten des andern Paares.

e) Entsprechend den in der Ebene getroffenen Festsetzungen hat das vollständige Viereck auf der Kugel vier Eckpunkte, sechs Seiten und drei Paare von Diagonalpunkten. Wenn man von verschiedenen Diagonalpunkten spricht, so meint man solche, welche nicht Gegenpunkte von einander sind. Hiernach gelten die beiden Sätze:

Die Verbindungslinie zweier Diagonalpunkte in einem vollständigen sphärischen Viereck wird durch die Schnittpunkte mit

den beiden Seiten, die nicht durch die Diagonalpunkte gehen, harmonisch geteilt.

Jede Seite eines vollständigen sphärischen Vierecks wird durch einen auf ihr gelegenen Diagonalpunkt und den Schnittpunkt mit der Verbindungslinie der anderen Diagonalpunkte harmonisch geteilt.

f) Ebenso besitzt ein sphärisches vollständiges Vierseit vier Seiten, sechs Paare von Eckpunkten und drei Diagonalen. Hierfür dürfen wir die Sätze aufstellen:

Zwei Seiten eines vollständigen sphärischen Vierseits liegen harmonisch zu der durch ihre Schnittpunkte gehenden Diagonale und dem Hauptkreise, welcher diese Punkte mit dem Schnittpunkte der beiden andern Diagonalen verbindet.

Jede Diagonale eines vollständigen sphärischen Vierseits wird durch die beiden anderen Diagonalen harmonisch geteilt.

§ 10.

Der Kegel zweiter Ordnung und zweiter Klasse.

1. Von den Entwicklungen des vorigen Paragraphen wollen wir eine wichtige Anwendung auf die Kegelfläche zweiter Ordnung machen. Wir gehen wieder von der Gleichung

$$(1)\quad f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

aus und betrachten zugleich die Verbindung der beiden Gleichungen:

$$(2)\quad x_4 = 0,\ f(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Wie wir bereits nachgewiesen haben, gehört der durch die Gleichung (1) dargestellten Fläche jede gerade Linie an, welche den Punkt (0, 0, 0, 1) mit einem beliebigen Punkte der durch die Gleichungen (4) bestimmten Kurve verbindet. Nun nennen wir einen Kegel jede Fläche, welche dadurch entsteht, daſs sich eine gerade Linie um einen festen Punkt längs einer gegebenen Kurve bewegt. Der feste Punkt heiſst der Scheitel oder der Mittelpunkt, die gegebene Kurve die Leitlinie des Kegels. Die Gleichung (1) stellt also einen Kegel dar, dessen Scheitel der Punkt O_4 des Koordinaten-Tetraeders und dessen Leitlinie die Kurve (2) ist.

2. Wir wollen jetzt annehmen, die Gleichung (1) sei homogen

vom n^{ten} Grade. Alsdann ist die Kurve (2) eine ebene Kurve n^{ter} Ordnung und wird als solche von jeder Geraden g der Ebene $O_1O_2O_3$ in n Punkten geschnitten. Die Verbindungslinie des Punktes O_4 mit einem beliebigen Schnittpunkte gehört dem Kegel an. Somit hat die Ebene, welche den Punkt O_4 mit der Geraden g verbindet, mit der Fläche n gerade Linien gemein, oder jede durch den Scheitel gehende Ebene schneidet den Kegel in n Geraden.

Hiernach hat jede beliebige Gerade l des Raumes n Punkte mit dem Kegel gemeinschaftlich. Denn die Ebene, welche die Gerade l mit dem Scheitel verbindet, schneidet den Kegel in n Geraden, und jede von diesen wird von l in einem Punkte geschnitten.

Dafs der Kegel (1) von jeder durch den Scheitel gelegten Ebene in n geraden Linien geschnitten wird, erkennen wir auch auf folgendem Wege.

Wenn die Gleichung der Ebene ist $m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 = 0$, und wenn hier m_3 von null verschieden ist, so gestattet sie uns, x_3 durch x_1 und x_2 auszudrücken. Dadurch geht die Gleichung (1) in eine Gleichung n^{ten} Grades für die Unbekannte $x_1 : x_2$ über und liefert uns für diesen Bruch n Werte. Jeder derartige Wert in Verbindung mit dem entsprechenden Werte für $x_3 : x_2$ stellt aber eine gerade Linie dar.

3. Wenn speciell die Gleichung (1) vom zweiten Grade ist und die Form hat:

$$(3) \quad \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa = 0, \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2, 3)$$

so ist der Kegel von der zweiten Ordnung. Die Gleichungen (2) stellen eine eigentliche Kurve zweiter Ordnung dar, falls die aus den Koefficienten $a_{\iota\varkappa}$ gebildete Determinante von null verschieden ist. Nun kann man, nachdem der Kegel (3) gegeben ist, die Ebene $x_4 = 0$ noch willkürlich wählen, ohne dafs dadurch die Gleichung (3) geändert wird. Bei jeder solchen Wahl stellen die Gleichungen (2) einen eigentlichen Kegelschnitt dar; jede solche Ebene schneidet also den Kegel in einem eigentlichen Kegelschnitte. Das gilt von jeder Ebene, welche nicht durch den Schnittpunkt der drei andern Koordinatenebenen, mit andern Worten, nicht durch den Scheitel des Kegels hindurchgeht. Einen Kegel, in dessen Gleichung die Koefficienten $a_{\iota\varkappa}$ die angegebene

Forderung erfüllen, nennen wir einen eigentlichen Kegel zweiter Ordnung. Aus unserer Darlegung ergiebt sich der Satz:

Ein Kegel, der von einer einzigen Ebene in einer eigentlichen Kurve zweiter Ordnung geschnitten wird, ist ein eigentlicher Kegel zweiter Ordnung und wird von jeder nicht durch seinen Scheitel gehenden Ebene in einem eigentlichen Kegelschnitte geschnitten.

4. Aus jedem Satze über Kegelschnitte können wir einen entsprechenden Satz für den Kegel herleiten. Das ist in doppelter Weise möglich. Entweder gehen wir von der ebenen Figur aus, die in unserm Falle in der Ebene $x_4 = 0$ liegt, oder wir benutzen diejenigen Gleichungen, aus denen der für die Ebene geltende Satz hervorgeht, zur Begründung räumlicher Eigenschaften. Auf jedem der beiden angegebenen Wege erhalten wir unmittelbar folgende Sätze:

Der Kegel zweiter Ordnung ist durch fünf seiner Erzeugenden, oder wenn man lieber will, durch seinen Scheitel und fünf seiner Punkte bestimmt. Sollen sechs durch einen Punkt gehende gerade Linien einem Kegel zweiter Ordnung angehören, so müssen, dem Pascalschen Satze entsprechend, die Gegenseiten des von ihnen gebildeten Sechskantes einander je in drei Geraden schneiden, welche in einer Ebene liegen.

5. Eine durch den Scheitel gehende Gerade fällt entweder ganz in die Fläche hinein oder sie hat keinen Punkt mit ihr gemeinschaftlich. Eine andere Gerade trifft die Fläche im allgemeinen in zwei Punkten. Damit der Punkt $(x' + \omega x'')$ der Fläche angehört, mufs die Gleichung erfüllt sein:

$$\Sigma\, a_{\iota\varkappa}\,(x_\iota' + \omega\, x_\iota'')\,(x_\varkappa' + \omega\, x_\varkappa'') = 0$$

oder

$$(4)\quad \omega^2\, \Sigma\, a_{\iota\varkappa}\, x_\iota''\, x_\varkappa'' + 2\,\omega\, \Sigma\, a_{\iota\varkappa}\, x_\iota'\, x_\varkappa'' + \Sigma\, a_{\iota\varkappa}\, x_\iota'\, x_\varkappa' = 0.$$

Diese Gleichung ist vom zweiten Grade in ω; sie kann nach I § 13, 12 (S. 82, 83) nur dann für alle Werte von ω erfüllt werden, falls die Determinante aus den Koefficienten gleich null ist.

Das Doppelverhältnis der beiden Schnittpunkte zu den Punkten (x') und (x'') wird durch den Bruch $\omega' : \omega''$ dargestellt, wo ω' und ω'' die Wurzeln der Gleichung (4) sind. Die Schnittpunkte liegen also zu den gegebenen Punkten harmonisch, falls

$$\omega' + \omega'' = 0$$

ist, oder wenn zwischen den Koordinaten (x') und (x'') die Bedingung besteht:

$$(5) \quad \Sigma a_{ik} x_i' x_k'' = 0.$$

Zwei solche Punkte heifsen konjugierte Pole in Bezug auf den Kegel.

Alle konjugierten Pole (x) zu einem gegebenen Punkte (x') liegen auf der Ebene:

$$(6) \quad \Sigma a_{ik} x_i x_k' = 0,$$

der Polarebene des Punktes.

Diese Gleichung, welche eine durch den Scheitel gehende Ebene darstellt, ändert sich nicht, wenn man der Koordinate x_4' andere Werte beilegt; hiernach haben alle Punkte eines jeden durch den Scheitel gehenden Strahles dieselbe Polarebene. Zwei vom Scheitel ausgehende Strahlen heifsen konjugierte Polare in Bezug auf den Kegel, wenn ein Punkt des einen konjugierter Pol zu einem Punkte des andern ist. Sobald nämlich diese Bedingung erfüllt wird, ist jeder Punkt des einen Strahles konjugierter Pol zu jedem Punkte des andern. Wir dürfen daher jedem durch den Scheitel gehenden Strahle eine bestimmte Polarebene und jeder durch diesen Punkt gelegten Ebene einen bestimmten Strahl als Polare zuordnen.

6. Die Polarentheorie des Kegels kann direkt aus der des Kegelschnitts hergeleitet werden, sobald man nur berücksichtigt, dafs vier harmonische Punkte einer Geraden von jedem beliebigen Punkte aus durch vier harmonische Strahlen projiziert werden. Es wird genügen, im Folgenden die wichtigsten Sätze anzuführen, welche in dieser Beziehung für den Kegel gelten, und es dem Leser zu überlassen, ob er sie aus den §§ 13—15 des ersten Bandes oder direkt aus der Gleichung (6) herleiten will.

Wenn eine Gerade sich so in einer Ebene bewegt, dafs sie stets durch den Scheitel des Kegels hindurchgeht, so dreht sich ihre Polarebene um einen festen Strahl, die Polare der Ebene; und wenn sich eine Ebene um eine durch den Scheitel gehende Gerade dreht, so bewegt sich ihre Polare in einer Ebene, der Polarebene der Geraden.

Die Polarebene eines auf dem Kegel gelegenen Punktes geht in die Tangentialebene über. Alle Punkte einer Erzeugenden

haben dieselbe Polarebene, also auch dieselbe Tangentialebene; jede Tangentialebene eines Kegels berührt längs einer Erzeugenden.

Legt man in den Schnittlinien einer durch den Scheitel gehenden Ebene die Tangentialebenen an denselben, so schneiden sie sich in der Polare der Ebene.

Durch jeden Punkt des Raumes, und somit auch durch jede vom Scheitel ausgehende Gerade lassen sich zwei Tangentialebenen an den Kegel legen; es sind das diejenigen Ebenen, welche längs der Schnittlinien der Polarebene berühren.

Man kann auf unendlich viele Weisen drei Strahlen bestimmen, welche zu je zweien konjugierte Polare in Bezug auf den Kegel sind; jede Ebene eines solchen Dreikants ist die Polarebene der gegenüberliegenden Kante. Wählt man drei solche gerade Linien zu Axen eines Koordinaten-Tetraeders, während die vierte Ebene desselben willkürlich bleibt, so erhält man eine Darstellung des Kegels durch drei Quadrate.

7. Der Einteilung der eigentlichen Kegel zweiter Ordnung legt man am besten die Darstellung durch drei Quadrate zu Grunde. Diese drei Quadrate haben entweder sämtlich dasselbe Vorzeichen, oder zwei von ihnen haben ein anderes Vorzeichen als das dritte. Demnach erhalten wir zwei verschiedene Arten, jenachdem die Gleichung in einer der beiden Formen dargestellt werden kann:

$$\text{A)}\quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0.$$
$$\text{B)}\quad x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

Im ersten Falle ist nur die Spitze des Kegels reell; die Fläche enthält keine reellen Geraden und keine reellen Tangentialebenen; kein von der Spitze ausgehender Strahl fällt in seine Polarebene. Die durch den Scheitel gehenden Ebenen haben mit der Fläche ein imaginäres Geradenpaar, alle andern Ebenen einen eigentlichen imaginären Kegelschnitt gemeinschaftlich.

8. Die Gleichung B) stellt einen reellen Kegel dar, der von jeder nicht durch den Scheitel gehenden Ebene in einem eigentlichen reellen Kegelschnitte geschnitten wird. Eine durch den Scheitel gelegte Ebene hat mit dem Kegel entweder ein reelles Geradenpaar gemeinschaftlich (die Ebene schneidet den Kegel), oder die gemeinsame Linie ist eine Doppelgerade (die Ebene berührt den Kegel), oder das gemeinsame Geradenpaar ist imaginär.

Um die Lage eines Punktes dem Kegel gegenüber zu charakterisieren, legen wir durch den Punkt eine Ebene. Liegt der gegebene Punkt im Innern des von dieser Ebene ausgeschnittenen Kegelschnittes, so mufs jede in der Ebene durch den Punkt gezogene Gerade den Kegelschnitt und somit auch den Kegel treffen. Es schneidet also jede durch den Punkt und den Scheitel des Kegels gelegte Ebene aus demselben zwei gerade Linien aus, und hiernach schneidet jede durch den Punkt gehende Gerade den Kegel in zwei Punkten. Der Punkt liegt innerhalb einer jeden Kurve, in der eine durch ihn gelegte Ebene den Kegel schneidet; er ist ein Innenpunkt desselben. In gleicher Weise führen wir die Aufsenpunkte ein; es sind dies Punkte, von denen aus sich sowohl schneidende als nicht-schneidende Gerade ziehen lassen.

Da jede durch einen Innenpunkt gehende Gerade den Kegel schneidet, so liegt jede Gerade, welche den Kegel nicht schneidet, ganz in seinem Äufsern.

Die Polarebene zu einer geraden Linie, welche vom Scheitel aus in sein Inneres gezogen wird, gehört ganz dem Äufsern an, weil durch die Gerade keine Tangentialebene gelegt werden kann; dagegen schneidet die Polarebene zu einem Aufsenpunkte den Kegel in zwei Erzeugenden. Von jedem Tripel konjugierter Durchmesser liegen zwei im Äufsern, einer im Innern des Kegels.

9. Wenn die aus den Koefficienten der Gleichung (6) gebildete Determinante gleich null ist, so stellt diese Gleichung in Verbindung mit der Gleichung $x_4 = 0$ ein Geradenpaar dar. Die Verbindungslinien des Punktes O_4 mit den Punkten dieser beiden Geraden füllen zwei Ebenen an; somit wird in diesem Falle durch die Gleichung (6) ein Ebenenpaar dargestellt. Die Ebenen dieses Paares sind reell oder imaginär, jenachdem die beiden in der Ebene $x_4 = 0$ gelegenen Geraden reell oder imaginär sind. Auch kann man in Anwendung der in I § 16, 7 gegebenen Regel die linke Seite von (6) durch zwei Quadrate darstellen; jenachdem diese dasselbe oder verschiedenes Vorzeichen haben, ist das Ebenenpaar imaginär oder reell.

Die Gleichung (6) gilt in Verbindung mit der Gleichung $x_4 = 0$ für eine Doppelgerade, falls nicht nur die aus den Koefficienten a_{ix} gebildete Determinante selbst, sondern auch alle ihre

zweireihigen Unterdeterminanten verschwinden. Demnach stellt in diesem Falle die Gleichung (6) für sich eine Doppelebene dar.

10. Den Gleichungen

$$(7)\quad \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa = 0,\quad \Sigma b_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa = 0$$
$$(\iota, \varkappa = 1, 2, 3)$$

entsprechen zwei konzentrische Kegel. Jeder Kegel, welcher bei einem konstanten Werte von μ durch die Gleichung

$$(8)\quad \Sigma (a_{\iota\varkappa} + \mu b_{\iota\varkappa}) x_\iota x_\varkappa = 0$$

dargestellt wird, gehört dem durch die beiden Kegel (9) bestimmten Büschel an. Auf einen solchen Büschel kann man alle Sätze übertragen, die für einen Kegelschnittsbüschel gelten. Die Polarebenen zu einer jeden durch den Scheitel gehenden Geraden schneiden sich in einer zweiten Geraden, der gemeinschaftlichen Polaren der gegebenen Geraden. Wenn sich die Polarebenen des Strahles p in Bezug auf die Kegel des Büschels in dem Strahle p' schneiden, so gehen auch die Polarebenen des Strahles p' durch den Strahl p hindurch.

Unter den durch den gemeinschaftlichen Scheitel gehenden Geraden sind im allgemeinen drei dadurch ausgezeichnet, daſs jede von ihnen für alle Kegel dieselbe Polarebene besitzt; diese drei geraden Linien bilden die Kanten eines dem Büschel gemeinschaftlichen Polardreikants. Sobald diese drei Kanten als Axen einem Koordinaten-Tetraeder angehören, werden alle Kegel des Büschels durch dieselben drei Quadrate dargestellt.

Dem Büschel gehören drei Ebenenpaare an; die Schnittlinien der Ebenen eines Paares bilden die Kanten des gemeinschaftlichen Polardreikants.

11. Der Kegel kann auch vermittelst Ebenenkoordinaten behandelt werden. Wie wir gesehen haben, genügen der in u_1, u_2, u_3 homogenen Gleichung

$$(9)\quad \Phi (u_1, u_2, u_3) = 0$$

alle Ebenen, welche eine in der Ebene $O_1O_2O_3$ gelegene Kurve berühren. Fügen wir jetzt noch die Bedingung $u_4 = 0$ hinzu, verbinden wir demnach die Gleichungen:

$$(10)\quad u_4 = 0,\ \Phi (u_1, u_2, u_3) = 0,$$

so erhalten wir alle Berührungsebenen der Kurve, welche durch den Punkt O_4 hindurchgehen. Gleichwie die Tangenten einer ebenen Kurve diese selbst einhüllen, so umhüllen auch die den

Gleichungen (10) genügenden Ebenen einen Kegel, welcher den Punkt O_4 zum Scheitel und die Kurve (9) zur Leitlinie hat. Wenn die Gleichung (9) vom m^{ten} Grade ist, so lassen sich von jedem Punkte der Ebene (0, 0, 0, 1) aus m Tangenten an sie legen; somit gehen auch durch jeden vom Punkte O_4 ausgehenden Strahl m Tangentialebenen an den Kegel; wir sagen in diesem Falle, er sei von der m^{ten} Klasse.

12. Hiernach stellt die Vereinigung der beiden Gleichungen:

(11) $u_4 = 0$, $\Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota u_\varkappa = 0$ (für $\iota, \varkappa = 1, 2, 3$)

einen Kegel zweiter Klasse dar. Man überzeugt sich sehr leicht von der Richtigkeit der folgenden Sätze:

Ein Kegel zweiter Klasse ist durch fünf Tangentialebenen bestimmt, die durch denselben Punkt gehen. Damit sechs solche Ebenen einen Kegel berühren, müssen die drei Ebenen, durch welche je zwei Gegenkanten der von ihnen gebildeten körperlichen Ecke mit einander verbunden werden, durch dieselbe gerade Linie gehen.

Wenn die aus den Koefficienten $A_{\iota\varkappa}$ gebildete Determinante von null verschieden ist, so ist die Leitlinie eine eigentliche Kurve zweiter Klasse und somit auch von der zweiten Ordnung. In diesem Falle hat jede vom Scheitel ausgehende Gerade eine bestimmte Polarebene und jede durch den Scheitel gelegte Ebene eine bestimmte Polare.

13. Verschwindet die Determinante aus den Koefficienten $A_{\iota\varkappa}$, ohne dafs alle ihre Unterdeterminanten gleich null sind, so stellt die zweite Gleichung (11), falls man in ihr die Gröfsen u_1, u_2, u_3 als Linienkoordinaten in der Ebene $O_1O_2O_3$ auffafst, ein Punktepaar dar. Den beiden Gleichungen (11) genügen also alle Ebenen, welche durch einen der dargestellten Punkte und den Punkt O_4 gelegt werden können. In diesem Falle ist der Kegel zweiter Klasse durch ein Geradenpaar zu ersetzen, nämlich durch die beiden geraden Linien l_1 und l_2, welche den Punkt O_4 mit den Punkten des Punktepaares verbinden. Wir dürfen auch sagen, der Kegel sei in zwei Ebenenbüschel übergegangen, deren Axen sich im Punkte (0, 0, 0, 1) schneiden.

In diesem Falle kann man die zweite Gleichung (11) auf die Form zweier Quadrate bringen. Wenn diese Quadrate entgegengesetztes Vorzeichen haben, so sind die beiden Ebenenbüschel

reell. Sind aber die Quadrate mit demselben Vorzeichen versehen, so sind die Träger und damit auch die Büschel imaginär; den Gleichungen (11) genügt nur eine einzige reelle Ebene.

14. Die durch die zweite Gleichung (11) dargestellte ebene Kurve geht in einen Doppelpunkt über, sobald die sämtlichen Unterdeterminanten der aus den Koefficienten $A_{\iota\varkappa}$ gebildeten Determinante verschwinden. Demnach wird der Kegel in diesem Falle durch eine Doppelgerade oder, wenn man lieber will, durch einen doppelt zu zählenden Ebenenbüschel vertreten.

15. Alle Kegel, welche bei beliebigem Werte von λ durch die Gleichungen

$$(12)\quad u_4 = 0,\ \Sigma(A_{\iota\varkappa} + \lambda B_{\iota\varkappa})\, u_\iota\, u_\varkappa = 0,$$
$$(\iota, \varkappa = 1, 2, 3)$$

dargestellt werden, bilden eine Schar konzentrischer Kegel. Die Sätze, welche für eine solche Schar gelten, lassen sich unmittelbar aus den Sätzen über eine Kegelschnittsschar herleiten; es genügt daher, sie ohne Beweis auszusprechen.

Die Polaren zu einer jeden durch den Scheitel gelegten Ebene liegen auf einer zweiten Ebene. Nur drei solche Ebenen haben im allgemeinen für alle Kegel der Schar dieselbe Polare; diese drei Ebenen bilden ein gemeinschaftliches Polardreikant für die Kegel der Schar. Für ein Koordinaten-Tetraeder, dem diese drei Ebenen als Seiten angehören, gehen die zweiten Gleichungen (12) in die Summe von drei Quadraten über.

Der Schar gehören im allgemeinen auch drei specielle Kegel zweiter Klasse, drei Geradenpaare an. Jede Ebene, welche die beiden Geraden eines solchen Paares enthält, hat für alle Kegel der Schar dieselbe Polare.

Konzentrische Kegel einer Schar haben im allgemeinen vier Tangentialebenen gemeinsam.

16. Bei der Darstellung eines Kegels kann man auch die in § 9, 3 angegebene Methode benutzen. Wir wollen annehmen, der Scheitel des Kegels habe die Koordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4. Die Leitlinie soll in der Ebene liegen, welche durch die Punkte (x'), (x''), (x''') hindurchgeht. Jeder einzelne Punkt dieser Ebene kann auf die durch die Gleichung (2) angegebene Art bestimmt werden; seine Koordinaten verhalten sich also wie die Gröfsen

$$(11)\quad \lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_1'' + \lambda_3 x_1''',\ \ldots\ \lambda_1 x_4' + \lambda_2 x_4'' + \lambda_3 x_4'''.$$

Der Leitlinie mögen alle Punkte angehören, für welche zwischen den Koefficienten λ_1, λ_2, λ_3 eine homogene Gleichung besteht:

$$(12) \quad F(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0.$$

Ein beliebiger Punkt auf der Verbindungslinie des Punktes (11) mit dem Punkte (ξ) hat die Koordinaten:

$$(13) \quad x_\alpha = \mu\xi_\alpha + \lambda_1 x_\alpha' + \lambda_2 x_\alpha'' + \lambda_3 x_\alpha'''. \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

Diese Gleichungen gestatten, die vier Koefficienten μ, λ_1, λ_2, λ_3 linear durch $x_1 \ldots x_4$ auszudrücken; wir erhalten:

$$(14) \quad \lambda_1 = \Sigma c_{1\nu} x_\nu, \quad \lambda_2 = \Sigma c_{2\nu} x_\nu, \quad \lambda_3 = \Sigma c_{3\nu} x_\nu, \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4)$$

wo die Koefficienten von den Koordinaten (ξ), (x'), (x''), (x''') abhangen. Indem wir diese Werte für λ_1, λ_2, λ_3 in die Gleichung (12) einsetzen, erhalten wir eine Beziehung zwischen den Koordinaten, welche erfüllt sein mufs, wenn der Punkt (x) auf der Verbindungslinie des Punktes (ξ) mit einem Punkte der durch die Gleichung (12) bestimmten Leitlinie liegen soll; die neue Gleichung ist also die Gleichung des Kegels.

Für diese Gleichung ist es charakteristisch, dafs sie nur die drei linearen Formen enthält, welche auf der rechten Seite der Gleichungen (14) stehen. Jede homogene Gleichung zwischen drei Formen, in denen die Punktkoordinaten linear homogen auftreten, stellt auch umgekehrt einen Kegel dar, wie man durch ähnliche Erwägungen zeigen kann.

17. Um einen Kegel, dessen Scheitel eine beliebige Lage hat, durch Ebenenkoordinaten darzustellen, hat man folgendes zu beachten. Einer beliebigen Gleichung $\Phi(u_1 \ldots u_4) = 0$ zwischen den Koordinaten u_1, u_2, u_3, u_4 genügen alle Ebenen, welche eine gewisse Fläche berühren. Fügt man noch eine lineare Gleichung $\Sigma a_\iota u_\iota = 0$ hinzu, so beschränkt man sich auf diejenigen Tangentialebenen der Fläche, welche durch den Punkt (a_1, a_2, a_3, a_4) hindurchgehen, also auf die Tangentialebenen eines Kegels, der diesen Punkt zum Scheitel hat. Daher stellt die Verbindung der Gleichungen:

$$(15) \quad \Sigma a_\iota u_\iota = 0, \quad \Phi(u_1 \ldots u_4) = 0$$

einen Kegel dar, welcher den Punkt $(a_1 \ldots a_4)$ zum Scheitel hat und die Fläche $\Phi(u) = 0$ berührt.

Hierbei möchten wir eine Bemerkung beifügen, die freilich in den folgenden Untersuchungen kaum benutzt wird, aber doch einige Beachtung verdient. Da für alle Ebenen des Kegels die erste Gleichung (15) befriedigt wird, welche wir kurz $A = 0$ schreiben wollen, so ändert sich der Kegel nicht, wenn man zu der zweiten Gleichung eine beliebige Funktion von $u_1 \ldots u_4$ hinzufügt, welche für $A = 0$ selbst verschwindet, wofern nur die Gleichung auch in der neuen Form wiederum homogen ist. Wenn also etwa die Funktion Φ homogen vom m^{ten} Grade ist, so darf man eine beliebige homogene Funktion $B(u_1 \ldots u_4)$ vom Grade $m-1$ bilden und dann Φ durch die Summe $\Phi + AB$ ersetzen. Unter der gemachten Annahme wird demnach der Kegel (15) auch durch die Verbindung der Gleichungen dargestellt:

$$A = 0, \quad \Phi + AB = 0.$$

Übungen:

1) Wie lautet die Bedingung dafür, dafs die Ebene $(u_1, u_2, u_3, 0)$ den Kegel

$$\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + \frac{x_3^2}{a_3} = 0$$

a) in zwei reellen, oder

b) in zwei imaginären Geraden schneidet, oder

c) längs einer Erzeugenden berührt?

2) Von einem Punkte aus die Tangentialebenen an einen Kegel zweiter Ordnung zu legen.

3) Vier Strahlen, welche vom Scheitel eines Kegels zweiter Ordnung ausgehen und in einer Ebene liegen, haben dasselbe Doppelverhältnis wie ihre Polarebenen.

4) Alle Kegel zweiter Ordnung, welche ein gemeinsames Polardreikant besitzen und durch einen festen Punkt gehen, haben vier Erzeugende gemeinschaftlich.

5) Die Einteilung der Kegel zweiter Ordnung stimmt vollständig überein mit der in I § 18 (S. 110) gegebenen Einteilung der Kurven zweiter Ordnung.

6) Man soll folgende Kegel bei Benutzung desselben Koordinatensystems durch Punktkoordinaten darstellen:

a) $u_4 = 0, \; a_1u_1^2 + a_2u_2^2 + a_3u_3^2 = 0,$

b) $u_4 = 0, \; u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0,$

c) $u_4 = 0, \; u_2u_3 + u_3u_1 + u_1u_2 = 0.$

7) Die Flächen eines konzentrischen Kegelbüschels werden von jeder durch den Scheitel gelegten Ebene in Strahlen einer Involution geschnitten.

8) Einen Kegel zu konstruieren, der einen gegebenen Mittelpunkt hat, durch vier Punkte hindurchgeht und eine gegebene Gerade berührt.

9) Einen Kegel mit vorgeschriebenem Scheitel zu konstruieren, der vier gegebene Gerade berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.

10) Man untersuche den Kegelbüschel, dem die Kegel angehören:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,\ x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

a) Welches ist das gemeinsame Polardreikant?

b) Welche Ebenenpaare gehören dem Büschel an?

c) Welche Kanten sind sämtlichen Kegeln gemeinschaftlich?

d) In welcher Geraden durchschneiden sich die Polarebenen des Strahles $(x_1', x_2', x_3', 0)$?

e) Man untersuche die Strahleninvolution, welche durch die Schnittlinien der Kegel gebildet werden

α) auf einer jeden der drei Ebenen $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,$

β) auf der Ebene $x_1 + x_2 + x_3 = 0,$

γ) auf der Ebene $x_1 - x_2 + x_3 = 0.$

11) In entsprechender Weise untersuche man

a) den Büschel der Kegel

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,\ x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 = 0,$$

b) den Büschel der Kegel

$$x_1^2 - x_2^2 - 6x_1x_2 = 0,\ x_3^2 - 2x_1x_2 = 0.$$

12) Die Schnittlinie eines Kegels zweiter Ordnung mit einer konzentrischen Kugel heifst ein sphärischer Kegelschnitt. Man beweise für eine solche Kurve die im folgenden angegebenen Lehrsätze und löse die gestellten Aufgaben.

a) Ein sphärischer Kegelschnitt ist durch fünf Punkte auf der Kugel bestimmt.

b) Welche Lage müssen sechs Punkte auf der Kugel zu einander haben, damit es möglich wird, durch sie einen sphärischen Kegelschnitt zu legen.

c) Wenn auf der Kugel fünf Punkte und ein von dem letzten Punkte ausgehender Hauptkreis gegeben sind, so soll der Schnitt-

punkt dieses Hauptkreises mit dem durch die fünf Punkte gehenden Kegelschnitte gesucht werden.

d) In einem von fünf gegebenen Punkten einer Kugel an den durch sie bestimmten Kegelschnitt die Tangente zu legen.

e) Man soll an einen gezeichnet vorliegenden sphärischen Kegelschnitt von einem Punkte der Kugel aus die Tangenten legen.

f) Die Einteilung der sphärischen Kegelschnitte ist identisch mit der in I § 18 (S. 110) angegebenen Einteilung der ebenen Kurven zweiter Ordnung.

g) Auf der Kugel besteht eine uneigentliche Kurve zweiter Ordnung aus zwei Hauptkreisen, eine uneigentliche Kurve zweiter Klasse aus zwei Paaren von Gegenpunkten.

h) Jeder reelle eigentliche Kegelschnitt besteht aus zwei getrennten Zweigen.

i) Die Schnittpunkte eines Hauptkreises der Kugel mit den Gegenseiten eines vollständigen sphärischen Vierecks bilden eine Involution.

k) Die vier Seiten eines vollständigen sphärischen Vierseits mögen einander so in den sechs Punkten α, α', β, β', γ, γ' schneiden, dafs unter diesen sechs Punkten keine zwei Gegenpunkte vorkommen und dafs weder α und α', noch β und β', noch γ und γ' auf derselben Seite des Vierseits liegen. Dann werden die drei Punktepaare $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ und $\gamma\gamma'$ von jedem Punkte der Kugel aus in Strahlen einer Involution projiziert.

§ 11.

Die Oberflächen zweiter Ordnung.

1. Wir untersuchen diejenigen Flächen, welche durch eine homogene Gleichung zweiten Grades zwischen den Punktkoordinaten $x_1 \ldots x_4$ dargestellt werden. Diese Gleichung wird in folgender Form zu Grunde gelegt:

$$(1)\quad \begin{aligned} &a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + \\ &\quad 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{23}x_2x_3 + \\ &\quad\quad 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 = 0. \end{aligned}$$

Da wir hier wieder annehmen wollen, daſs an den Koefficienten die untern Marken vertauscht werden können, ohne daſs der Wert sich ändert, daſs also

$$a_{12} = a_{21},\ a_{13} = a_{31} \ldots a_{34} = a_{43},$$

allgemein $a_{\iota\varkappa} = a_{\varkappa\iota}$ ist, so können wir die Gleichung (1) auch in der Form schreiben:

$$x_1 \sum_{\varkappa} a_{1\varkappa} x_\varkappa + x_2 \sum a_{2\varkappa} x_\varkappa + x_3 \sum a_{3\varkappa} x_\varkappa + x_4 \sum a_{4\varkappa} x_\varkappa = 0;$$

dafür benutzen wir auch vielfach folgende Form:

$$(2) \qquad \sum_{\iota,\varkappa = 1 \ldots 4} a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa = 0.^1$$

Jede Fläche, welche durch eine solche Gleichung dargestellt wird, nennen wir eine Fläche zweiter Ordnung. Da die rechtwinkligen Cartesischen Koordinaten nur ein specieller Fall der Tetraeder-Koordinaten sind, so gehören zu den Flächen zweiter Ordnung jedenfalls das Ellipsoid, das ein- und das zweischalige Hyperboloid, das elliptische und das hyperbolische Paraboloid.

2. Wenn die durch die Gleichung (2) dargestellte Fläche durch den Punkt $(x_1' \ldots x_4')$ hindurchgehen soll, so muſs die Gleichung erfüllt sein:

$$\sum a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa' = 0.$$

Es ist dies eine homogene lineare Gleichung zwischen den zehn Koefficienten $a_{11}, a_{22} \ldots a_{34}$. Daher sind neun Gleichungen der letzten Art erforderlich, um die Verhältnisse der Koefficienten zu bestimmen. Wenn man daher neun Punkte kennt, durch welche die Fläche hindurchgehen soll, so lassen sich die Werte für diese Verhältnisse angeben; wir erhalten zehn Determinanten und dürfen jeden der zehn Koefficienten, bis auf einen beliebigen gemeinschaftlichen Faktor, einer unter diesen Determinanten gleichsetzen. Nur wenn diese zehn Determinanten sämtlich verschwinden, bleiben die Koefficienten unbestimmt. Daraus folgt:

Durch neun Punkte ist im allgemeinen eine Fläche zweiter Ordnung bestimmt;

mit andern Worten:

---

[1] Wenn in einer Summe mehrere Summationsbuchstaben vorkommen, so soll jedesmal über alle diese summiert werden, falls das Gegenteil nicht ausdrücklich dadurch angedeutet wird, daſs dem Summationszeichen nur ein einziger Buchstabe angehängt wird.

Durch neun Punkte, die nicht eine specielle Lage gegen einander haben, läfst sich eine einzige Fläche zweiter Ordnung legen.

3. Bezieht man die Schnittlinie der Fläche (1) mit der Ebene $x_4 = 0$ auf ein Koordinatensystem, dessen Eckpunkte mit den drei in dieser Ebene liegenden Eckpunkten des Koordinaten-Tetraeders zusammenfallen und dessen Einheitspunkt in derjenigen Geraden liegt, welche den vierten Eckpunkt mit dem Einheitspunkte des räumlichen Systems verbindet, so wird die Gleichung dieser Linie (nach § 9, 1 S. 60) erhalten, indem man in der Gleichung (1) $x_4 = 0$ setzt. Die Gleichung der Schnittlinie ist also:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0,$$

oder in anderer Form:

$$\sum_{\iota, \varkappa = 1, 2, 3} a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa = 0.$$

Die Schnittlinie ist somit eine Kurve zweiter Ordnung.

In gleicher Weise zeigt man, daſs jede Koordinatenebene aus der Fläche einen Kegelschnitt ausschneidet.

4. Wenn man von dem gegebenen Koordinatensysteme zu irgend einem andern System von Tetraeder-Koordinaten y_1, y_2, y_3, y_4 übergeht, so muſs man (nach § 6, 7) die Gröſsen x_1, x_2, x_3, x_4 durch homogene lineare Funktionen von y_1, y_2, y_3, y_4 ersetzen. Die Gleichung (1) bleibt also homogen vom zweiten Grade und nimmt etwa die Form an:

$$\sum b_{\iota\varkappa} y_\iota y_\varkappa = 0.$$

Aus dieser Gleichung wird die Gleichung der Schnittlinie mit der Ebene $y_4 = 0$ erhalten, indem man die Summation nur auf die Marken 1, 2, 3 ausdehnt; die Schnittlinie ist also wiederum eine Kurve zweiter Ordnung. Nun kann man jede beliebige Ebene des Raumes zu der einen Seite eines Koordinaten-Tetraeders nehmen; daher gilt allgemein der Satz:

Jede Ebene schneidet aus einer Fläche zweiter Ordnung eine Kurve zweiter Ordnung aus.

5. Dieser Satz läfst sich auch auf folgendem Wege erhärten. Wenn eine Ebene durch die drei Punkte (x'), (x''), (x''') gehen soll, so gelten für die Koordinaten ihrer Punkte die Beziehungen:

$$(3) \quad x_\alpha = \lambda_1 x_\alpha' + \lambda_2 x_\alpha'' + \lambda_3 x_\alpha''' \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4).$$

Hier bedeuten (nach § 9, 3) die Koefficienten λ_1, λ_2, λ_3 die Koordinaten in der durch die drei Punkte gelegten Ebene. Indem man die Werte (3) in die Gleichung (2) einsetzt, erhält die Schnittlinie die Gleichung:

$$\sum_{\iota, \varkappa = 1 \ldots 4} a_{\iota\varkappa} (\lambda_1 x_\iota' + \lambda_2 x_\iota'' + \lambda_3 x_\iota''') (\lambda_1 x_\varkappa' + \lambda_2 x_\varkappa'' + \lambda_3 x_\varkappa''') = 0.$$

Diese Gleichung kann man in einer andern Eorm schreiben. Man setze:

$$c_{11} = \sum a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa', \quad c_{22} = \sum a_{\iota\varkappa} x_\iota'' x_\varkappa'', \quad c_{33} = \sum a_{\iota\varkappa} x_\iota''' x_\varkappa''',$$
$$c_{12} = \sum a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa'', \quad c_{21} = \sum a_{\iota\varkappa} x_\iota'' x_\varkappa', \ldots\ldots\ldots;$$

dann ist $c_{12} = c_{21}$, $c_{13} = c_{31}$, $c_{23} = c_{32}$; die vorstehende Gleichung nimmt also die einfachere Gestalt an:

$$c_{11}\lambda_1^2 + c_{22}\lambda_2^2 + c_{33}\lambda_3^2 + 2c_{12}\lambda_1\lambda_2 + 2c_{13}\lambda_1\lambda_3 + 2c_{23}\lambda_2\lambda_3 = 0;$$

sie stellt in den Dreieckskoordinaten λ_1, λ_2, λ_3 einen Kegelschnitt dar.

6. Die Gerade $x_3 = x_4 = 0$ schneidet die Fläche in den beiden Punkten, welche sich aus der Gleichung:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0$$

ergeben. Hat man irgend ein anderes Koordinatensystem zu Grunde gelegt, so erhält man für die Bestimmung der Schnittpunkte irgend einer Kante mit der Fläche wiederum eine Gleichung zweiten Grades. In dieser Gleichung können sämtliche Koefficienten verschwinden; dann gehört die Gerade ganz der Fläche an. Im andern Falle hat die Gleichung zwei reelle oder zwei imaginäre oder zwei gleiche Wurzeln. Daher gilt der Satz:

Eine Gerade hat mit der Fläche zweiter Ordnung entweder zwei reelle oder zwei imaginäre oder zwei zusammenfallende Punkte gemein oder fällt ganz in sie hinein.

7. Für die Untersuchung der Schnittpunkte selbst ist folgender Weg geeigneter. Wenn (x′) und (x″) zwei beliebige Punkte sind, so verhalten sich die Koefficienten eines jeden Punktes ihrer Schnittlinie wie

$$(4) \quad x_1' + \omega x_1'' : x_2' + \omega x_2'' : x_3' + \omega x_3'' : x_4' + \omega x_4'',$$

wo ω die früher angegebene Bedeutung hat. Zu jedem Werte von ω gehört ein einziger Punkt der Geraden und zu jedem Punkte der Geraden ein einziger Wert von ω. Wenn wir die

Punkte finden wollen, welche diese Gerade mit der Fläche (2) gemeinschaftlich hat, so haben wir die Werte (4) in die Gleichung (2) einzusetzen. Dadurch erhalten wir folgende Gleichung:

$$(5) \quad \Sigma a_{\iota\varkappa} (x_\iota' + \omega x_\iota'') (x_\varkappa' + \omega x_\varkappa'') = 0.$$

Da aber $\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa'' = \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota'' x_\varkappa'$ ist, so können wir die Gleichung (5) auch in folgender Form schreiben:

$$(6) \quad \omega^2 \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota'' x_\varkappa'' + 2\omega \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa'' + \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa' = 0.$$

Wenn hier $\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota'' x_\varkappa'' = 0$, $\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa'' = 0$, $\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa' = 0$ ist, so wird die Gleichung für jeden Wert von ω befriedigt; die Gerade liegt dann ganz in der Fläche. In allen andern Fällen werden die Schnittpunkte durch eine Gleichung zweiten Grades bestimmt.

8. Schon aus dem in 6. bewiesenen Satze, dessen Richtigkeit auch aus 7. unmittelbar hervorgeht, folgt, dafs eine gerade Linie ganz in eine Fläche zweiter Ordnung hineinfällt, sobald sie mit ihr drei Punkte gemein hat. Wir wollen diesen Satz seiner Wichtigkeit wegen nochmals beweisen.

Angenommen, die Fläche habe die drei Punkte (x'), (x''), $(x' + \omega' x'')$ mit der Geraden (x'), (x'') gemeinschaftlich. Dann mufs die Gleichung (6) erfüllt sein, wenn man darin ω durch ω' ersetzt. Da aber die Punkte (x') und (x'') auf der Fläche liegen, so gelten die Gleichungen:

$$\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa' = 0, \quad \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota'' x_\varkappa'' = 0.$$

Demnach geht die neue Gleichung über in

$$\omega' \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa'' = 0.$$

Hier ist ω' von null verschieden; also mufs $\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa'' = 0$ sein oder die Gleichung (6) wird für alle Werte von ω erfüllt.

9. Man sagt, eine Fläche sei von der n^{ten} Ordnung, wenn ihre Schnittpunkte mit einer jeden geraden Linie durch eine Gleichung n^{ten} Grades gefunden werden. Es sei eine Fläche durch eine homogene Gleichung n^{ten} Grades zwischen den Koordinaten $x_1 \ldots x_4$ bestimmt. Dann bleibt die Gleichung auch für beliebige andere Tetraeder-Koordinaten homogen vom n^{ten} Grade. Wir sehen also auf den beiden Wegen, welche wir soeben für $n = 2$ durchgeführt haben, dafs die Bestimmung der Schnittpunkte mit einer geraden Linie von einer Gleichung n^{ten} Grades abhängt. Somit ist jede Fläche, deren Gleichung

in Tetraeder-Koordinaten homogen vom n^{ten} Grade ist, auch von der n^{ten} Ordnung.

Übungen:

1) Man bestimme die Fläche zweiter Ordnung, welche durch folgende neun Punkte geht:

a) (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, − 1), (0, 1, − 1, 0), (0, 1, 0, − 1).

b) (1, 0, 0, 1), (1, 0, 0, − 1), (0, 1, 0, 1), (0, 1, 0, − 1), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 1, − 1), (3, 4, 0, 5), (3, 0, − 4, − 5), (0, 3, 4, − 5).

c) (1, 0, 1, 0), (1, 0, − 1, 0), (1, 0, 0, 1), (1, 0, 0, − 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, − 1, 0), (1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, − 1), (1, 1, − 1, 1).

2) Man suche die Gleichung der Fläche zweiter Ordnung,

a) welche die geraden Linien $x_1 = x_3 = 0$ und $x_2 = x_4 = 0$ enthält und durch die Punkte (1, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 1) und (1, 1, − 1, − 1) geht;

b) welche die drei geraden Linien enthält:

$x_1 - x_3 = 0$, $x_2 + x_4 = 0$, sowie $x_1 + x_3 = 0$, $x_2 - x_4 = 0$ und $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$, $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$.

3) a) Wenn die durch die Gleichung (1) dargestellte Fläche durch den Punkt (1, 0, 0, 0) gehen soll, so mufs $a_{11} = 0$ sein.

b) Wenn diese Fläche den Punkt (1, 1, 0, 0) enthalten soll, so mufs sein: $a_{11} + a_{22} + 2a_{12} = 0$.

c) Diese Fläche kann durch die Punkte (1, 1, 0, 0) und (1, − 1, 0, 0) nur dann hindurchgehen, wenn $a_{12} = 0$, $a_{11} + a_{22} = 0$ ist.

4) Man bestimme die Schnittlinie der Fläche

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$$

mit folgenden Ebenen:

a) mit jeder Koordinatenebene,

b) mit der Ebene $x_1 - x_3 = 0$,

c) mit der Ebene, welche durch die Punkte (1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 1) und (0, 2, 1, 1) gelegt werden kann.

5) Man bestimme die Schnittlinien der in 4) angegebenen Ebenen mit folgenden Flächen:

a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$,

b) $x_1^2 + x_2^2 - 2x_3x_4 = 0$,
c) $x_1^2 - x_2^2 + 2x_3x_4 = 0$.

6) Man stelle die in 4) und 5) angegebenen Flächen mit folgenden geraden Linien zusammen:

a) $x_1 = x_2 = 0$, b) $x_1 = x_3 = 0$, c) $x_1 = x_4 = 0$,
d) $x_2 = x_3 = 0$, e) $x_2 = x_4 = 0$, f) $x_3 = x_4 = 0$,

g) mit der Verbindungslinie der Punkte (0, 1, 1, 1) und (1, 2, 1, 1),

h) mit der Verbindungslinie der Punkte
(1, 1, 0, 0) und (0, 0, 1, 1),
und bestimme jedesmal die Schnittpunkte.

§ 12.

Pol und Polarebene einer Fläche zweiter Ordnung.

1. Wie wir soeben gesehen haben, ergeben sich die Schnittpunkte derjenigen Geraden, welche die Punkte (x′) und (x″) verbindet, mit der Fläche:

$$(1) \quad \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa = 0$$

aus der Gleichung:

$$(2) \quad \omega^2 \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota'' x_\varkappa'' + 2\omega \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa'' + \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa' = 0.$$

Wir wollen diese Gleichung zunächst unter der Annahme eingehender betrachten, dafs weder der Punkt (x′) noch der Punkt (x″) der Fläche angehört. In diesem Falle hat die Gleichung (2) zwei (reelle oder imaginäre oder gleiche) Wurzeln ω_1 und ω_2. Der Quotient $\omega_1 : \omega_2$ stellt das Doppelverhältnis dar, in welchem die beiden Schnittpunkte zu den gegebenen Punkten stehen. Sollen die gegebenen Punkte zu den Schnittpunkten harmonisch liegen, so mufs der Quotient $\omega_1 : \omega_2 = -1$ werden, oder es mufs sein:

$$\omega_1 + \omega_2 = 0.$$

Dieser Forderung wird aber nur genügt, wenn in der Gleichung (2) der Koefficient von ω verschwindet, wenn also zwischen den Koordinaten (x′) und (x″) die Beziehung besteht:

$$(3) \quad \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa'' = 0.$$

Zwei Punkte heifsen konjugierte Pole in Bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung, wenn sie zu den Schnittpunkten ihrer Verbindungslinie mit der Fläche harmonisch liegen. Demnach stellt die Gleichung (3) die Bedingung dafür dar, dafs die Punkte (x′) und (x″) konjugierte Pole in Bezug auf die Fläche (1) sind.

Die angegebene Definition lehrt unmittelbar, daſs, wenn der Punkt (x'') konjugierter Pol zum Punkte (x') ist, auch der Punkt (x') konjugierter Pol von (x'') ist. Dasselbe folgt auch daraus, daſs in der Gleichung (3) die Koordinaten $(x_1' \ldots x_4')$ mit den Koordinaten $(x_1'' \ldots x_4'')$ vertauscht werden können.

2. Denken wir den Punkt (x') gegeben, so können wir zu ihm unendlich viele konjugierte Pole bestimmen; wenn der Punkt (x'') ein solcher sein soll, so brauchen wir die Koordinaten $(x_1'' \ldots x_4'')$ nur in einer solchen Weise zu wählen, daſs die Gleichung (3) befriedigt wird. Zu dem festen Punkte (x') sind daher alle Punkte (x) konjugierte Pole, deren Koordinaten der Gleichung genügen:

$$(4) \quad \Sigma a_{ix} x_i' x_x = 0.$$

Diese Gleichung kann auch in der Form geschrieben werden:

$$x_1 \Sigma a_{i1} x_i' + x_2 \Sigma a_{i2} x_i' + x_3 \Sigma a_{i3} x_i' + x_4 \Sigma a_{i4} x_i' = 0.$$

Hier können im allgemeinen die Koefficienten von x_1, x_2, x_3, x_4 nicht sämtlich verschwinden. Damit nämlich die vier Gleichungen zusammen bestehen können:

$$(5) \quad \begin{aligned} a_{11}x_1' + a_{21}x_2' + a_{31}x_3' + a_{41}x_4' &= 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\ a_{14}x_1' + a_{24}x_2' + a_{34}x_3' + a_{44}x_4' &= 0, \end{aligned}$$

muſs die aus ihren Koefficienten gebildete Determinante verschwinden. Diesen Fall schlieſsen wir vorläufig aus. Dann stellt die Gleichung (4) für jedes Wertsystem $(x_1' \ldots x_4')$ eine Ebene dar. Jeder Punkt (x) dieser Ebene, als Punkt (x'') betrachtet, genügt der Gleichung (3), ist also konjugierter Pol zu dem gegebenen Punkte (x'). Indem wir diejenigen Flächen (1), in deren Gleichung die Koefficienten die Eigenschaft haben, daſs ihre Determinanten von null verschieden sind, als eigentliche Flächen zweiter Ordnung bezeichnen, ergiebt sich aus der vorstehenden Entwicklung der Satz:

Alle Punkte, welche in Bezug auf eine eigentliche Fläche zweiter Ordnung konjugierte Pole zu einem gegebenen Punkte sind, liegen in einer festen Ebene, der Polarebene des Punktes.

3. Wir wollen jetzt nachweisen, daſs unter der gemachten Annahme auch umgekehrt jede Ebene als Polarebene betrachtet werden kann. Soll nämlich die Ebene

$$(6) \quad c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 = 0$$

die Polarebene des Punktes (x') sein, so dürfen sich die Koefficienten von x_1, x_2, x_3, x_4 in den Gleichungen (4) und (6) nur um einen gemeinschaftlichen Faktor unterscheiden. Es mufs daher sein:

$$(7) \quad \begin{aligned} a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + a_{13}x_3' + a_{14}x_4' &= \varrho c_1 \\ a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + a_{23}x_3' + a_{24}x_4' &= \varrho c_2 \\ a_{31}x_1' + a_{32}x_2' + a_{33}x_3' + a_{34}x_4' &= \varrho c_3 \\ a_{41}x_1' + a_{42}x_2' + a_{43}x_3' + a_{44}x_4' &= \varrho c_4. \end{aligned}$$

Da wir ausdrücklich angenommen haben, dafs die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{14} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{41} & a_{42} & \cdot & a_{44} \end{vmatrix}$$

von null verschieden ist, so lassen sich nach beliebiger Wahl von ϱ, c_1, c_2, c_3, c_4 die Werte von x_1', x_2', x_3', x_4' berechnen. Unter der gemachten Annahme hat jeder Punkt als Pol eine bestimmte Polarebene und jede Ebene einen bestimmten Pol.

4. Zu dem Punkte 1 sei die Ebene I und zu dem Punkte 2 die Ebene II die Polarebene. Dann ist jeder Punkt der Schnittlinie von I und II konjugierter Pol sowohl zum Punkte 1 wie zum Punkte 2. Die Polarebene zu irgend einem Punkte der Geraden (I II) mufs also diese beiden Punkte und somit auch ihre Verbindungslinie enthalten; bewegt sich ein Punkt auf der Schnittlinie (I II), so dreht sich seine Polarebene um die Verbindungslinie der Punkte 1 und 2. Daher ist jeder Punkt der Geraden (I II) konjugierter Pol zu jedem Punkte der Geraden (12); die Polarebene zu irgend einem Punkte der Geraden (12) mufs somit auch durch die Gerade (I II) hindurchgehen. Wir nennen zwei solche Linien konjugierte oder reciproke Polare von einander und können den Satz aussprechen:

Die Gerade, in welcher sich die Polarebenen zweier Punkte schneiden, ist die reciproke Polare zu der Verbindungslinie der gegebenen Punkte. Die Polarebenen zu den Punkten der ersten Geraden gehen durch die zweite, und die Polarebenen zu den Punkten der zweiten gehen durch die erste Gerade hindurch. Bewegt

sich ein Punkt auf der einen von zwei konjugierten Polaren, so dreht sich seine Polarebene jedesmal um die andere Gerade; dreht sich eine Ebene um die eine dieser beiden Linien, so bewegt sich der Pol auf der anderen.

5. Sind I, II, III der Reihe nach die Polarebenen von drei nicht in gerader Linie liegenden Punkten 1, 2, 3, so ist der Schnittpunkt der drei Ebenen gemeinschaftlicher Pol der drei Punkte 1, 2, 3; die Polarebene des Schnittpunktes mufs die drei gegebenen Punkte enthalten, somit diejenige Ebene sein, welche durch die drei Punkte hindurchgeht. Hiernach ist aber auch der Schnittpunkt der Ebenen I, II, III konjugierter Pol zu jedem Punkte der Ebene (1, 2, 3); die Polarebene zu jedem solchen Punkte geht also durch den Schnittpunkt hindurch. Wenn sich jetzt ein Punkt auf der Ebene (1, 2, 3) bewegt, so dreht sich die Polarebene um den Schnittpunkt der Ebenen I, II, III, und wenn umgekehrt eine Ebene um einen festen Punkt gedreht wird, so bewegt sich ihr Pol auf einer festen Ebene, der Polarebene des Punktes.

Bewegt sich ein Punkt auf einer Ebene, so dreht sich seine Polarebene um einen festen Punkt, den Pol der Ebene, und umgekehrt.

6. Die letzten Sätze, welche soeben rein begrifflich hergeleitet sind, lassen sich auch leicht durch Rechnung erweisen. Die Polarebene des Punktes (x') hat die Gleichung: $\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa = 0$; ebenso ist die Polarebene des Punktes (x'') durch die Gleichung: $\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota'' x_\varkappa = 0$ und die des Punktes $(x' + \lambda x'')$ durch die Gleichung:

$$(8) \quad \Sigma a_{\iota\varkappa} (x_\iota' + \lambda x_\iota'') x_\varkappa = 0$$

bestimmt. Die letzte Gleichung kann man aber auch schreiben:

$$\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa + \lambda \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota'' x_\varkappa = 0.$$

Ist $A = 0$ die Gleichung der Polarebene des Punktes (x'), $B = 0$ die der Polarebene des Punktes (x''), so hat die Polarebene des Punktes $(x' + \lambda x'')$ die Gleichung: $A + \lambda B = 0$.

Es seien $(x' + \lambda_1 x'')$, $(x' + \lambda_2 x'')$, $(x' + \lambda_3 x'')$, $(x' + \lambda_4 x'')$ vier in der Verbindungslinie der beiden gegebenen Punkte liegende Punkte; die Polarebenen haben der Reihe nach die Gleichungen:

$$A + \lambda_1 B = 0, \quad B + \lambda_2 B = 0, \quad A + \lambda_3 B = 0, \quad A + \lambda_4 B = 0.$$

Die vier Punkte haben das Doppelverhältnis:

$$\frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_4 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_4}.$$

Dieser Bruch stellt aber auch das Doppelverhältnis der vier Ebenen dar. Die Polarebenen zu vier in gerader Linie liegenden Punkten haben demnach dasselbe Doppelverhältnis wie die vier Punkte. Konstruieren wir zu allen Punkten einer geraden Linie die Polarebenen in Bezug auf eine gegebene Fläche zweiter Ordnung, so bilden diese Ebenen einen Büschel, welcher der Punktreihe projektiv zugeordnet ist.

Übungen:

1) a) Ist $O_1O_2O_3O_4$ das Koordinaten-Tetraeder, und sollen die Polarebenen der Punkte O_1 und O_2 in Bezug auf die Fläche (1) durch die Kante O_3O_4 hindurchgehen, so muſs sein

$$a_{13} = a_{14} = a_{23} = a_{24} = 0.$$

b) Man zeige, daſs für $a_{13} = a_{14} = a_{23} = a_{24} = 0$ die Polarebene eines jeden Punktes der Kante O_1O_2 durch O_3O_4 und die Polarebene eines jeden Punktes von O_3O_4 durch O_1O_2 hindurchgeht.

c) Welches ist unter der in b) gemachten Annahme die Polarebene des Punktes $(\mu, \nu, 0, 0)$ und welches die Polarebene des Punktes $(0, 0, \varrho, \sigma)$?

2) Wenn die Punkte (1, 0, 0, 0) und (0, 1, 0, 0) konjugierte Pole für die Fläche (1) sein sollen, so muſs $a_{12} = 0$ sein. Wie lautet die entsprechende Bedingung dafür, daſs irgend zwei andere Eckpunkte des Koordinaten-Tetraeders konjugierte Pole sind?

3) a) Welche Bedingungen müssen die Koefficienten der Gleichung (1) erfüllen, damit die Ebene $O_2O_3O_4$ die Polarebene des Punktes O_1 ist?

b) Man zeige, daſs jetzt auch die Polarebene zu jedem Punkte $(0, x_2', x_3', x_4')$ der Ebene $O_2O_3O_4$ durch den Punkt O_1 geht.

4) a) Der Punkt O_1 soll die Ebene $\Sigma m_{1\varkappa} x_\varkappa = 0$, der Punkt O_2 die Ebene $\Sigma m_{2\varkappa} x_\varkappa = 0$, der Punkt O_3 die Ebene $\Sigma m_{3\varkappa} x_\varkappa = 0$ und der Punkt O_4 die Ebene $\Sigma m_{4\varkappa} x_\varkappa = 0$ zur Polarebene in Bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung haben. Welche Beziehungen müssen zwischen den Koefficienten dieser vier Ebenen bestehen? Wieviel Bedingungen erhalten wir hierfür? Sind diese von einander unabhängig?

b) Können drei beliebige Ebenen Polarebenen zu drei willkürlich gewählten Punkten in Bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung sein, oder mufs eine Bedingung dafür bestehen, dafs der Punkt (x') die Polarebene (u'), der Punkt (x'') die Polarebene (u'') und der Punkt (x''') die Polarebene (u''') hat?

5) a) Zu einem beliebigen Punkte der Ebene $O_2O_3O_4$ suche man die Polarebene in Bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung und die Polare in Bezug auf die Schnittlinie der Fläche mit dieser Ebene. Welche Lage hat die Polare der Polarebene gegenüber?

b) Man leite hieraus einen allgemeinen Satz her.

c) Man beweise diesen Satz aus dem Begriffe der Polare und der Polarebene.

6) a) Man bringe die in 4) und 5) gefundenen Bedingungen in Beziehung zu einander.

b) Wieviel Bedingungsgleichungen müssen zwischen den Koefficienten der Gleichung (1) bestehen, damit die Ebene (u') die Polarebene des Punktes (x') wird?

7) a) Wenn $f(x_1 \ldots x_4)$ eine homogene Funktion zweiten Grades in x_1, x_2, x_3, x_4 ist und wenn gesetzt wird

$$\frac{\partial f(x_1 \ldots x_4)}{\partial x_1} = f'(x_1) \quad \ldots \quad \frac{\partial f(x_1 \ldots x_4)}{\partial x_4} = f'(x_4),$$

so ist

$$x_1 f'(x_1) + x_2 f'(x_2) + x_3 f'(x_3) + x_4 f'(x_4) = 2f(x).$$

b) Wenn $(x_1 \ldots x_4)$ und $(y_1 \ldots y_4)$ zwei beliebige Wertsysteme und $f(x)$ homogen vom zweiten Grade ist, so ist

$$\Sigma x_i f'(y_i) = \Sigma y_i f'(x_i).$$

Für $f(x) = \Sigma a_{ik} x_i x_k$ wird jeder der beiden Ausdrücke gleich $\Sigma a_{ik} x_i y_k$.

c) Damit die Gleichung $f(x_1 \ldots x_4) = 0$ eine eigentliche Fläche zweiter Ordnung darstellt, müssen die vier linearen Formen $f'(x_1)$, $f'(x_2)$, $f'(x_3)$, $f'(x_4)$ von einander unabhängig sein; es darf daher nicht möglich sein, vier Konstante c_1, c_2, c_3, c_4 so zu bestimmen, dafs die Gleichung

$$c_1 f'(x_1) + c_2 f'(x_2) + c_3 f'(x_3) + c_4 f'(x_4) = 0$$

für alle Wertsysteme $x_1 \ldots x_4$ befriedigt wird.

d) Unter derselben Bedingung müssen die vier Ebenen $f'(x_1) = 0$, $f'(x_2) = 0$, $f'(x_3) = 0$, $f'(x_4) = 0$ ein Tetraeder begrenzen.

e) Die Polarebene des Punktes (x') in Bezug auf die Fläche $f(x_1 \ldots x_4) = 0$ kann in den beiden Formen geschrieben werden:

$$x_1 f(x_1') + x_2 f(x_2') + x_3 f(x_3') + x_4 f(x_4') = 0$$

und

$$x_1' f(x_1) + x_2' f(x_2) + x_3' f(x_3) + x_4' f(x_4) = 0.$$

f) Speciell hat der Punkt (1, 0, 0, 0) die Polarebene $f'(x_1) = 0$, der Punkt (0, 1, 0, 0) die Polarebene $f'(x_2) = 0$ u. s. w.

g) Soll die Ebene (u') den Pol (x') haben, so müssen die Gleichungen bestehen:

$$u_1' : u_2' : u_3' : u_4' = f'(x_1') : f'(x_2') : f'(x_3') : f'(x_4').$$

§ 13.

Die Tangentialebenen der Flächen zweiter Ordnung.

1. Wie wir gesehen haben, ergeben sich die Punkte, welche die Verbindungslinie der Punkte (x') und (x'') mit der Fläche

$$(1) \quad \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa = 0$$

gemeinschaftlich hat, aus der Gleichung

$$(2) \quad \omega^2 \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota'' x_\varkappa'' + 2\omega \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa'' + \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa' = 0.$$

Wenn die Gleichung befriedigt wird:

$$(3) \quad \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa' = 0,$$

wenn also der Punkt (x') der Fläche angehört, so hat die linke Seite der Gleichung (2) den Faktor ω. Tritt jetzt noch die weitere Bedingung hinzu:

$$(4) \quad \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa'' = 0,$$

so geht die Gleichung (2) über die

$$\omega^2 \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota'' x_\varkappa'' = 0.$$

Wofern der Punkt (x'') nicht ebenfalls der Fläche angehört, ist die Gleichung (4) die Bedingung dafür, dafs die Gleichung (2) nur die eine Wurzel $\omega = 0$ hat, oder dafs die Verbindungslinie des auf der Fläche liegenden Punktes (x') mit dem Punkte (x'') nur den Punkt (x') mit der Fläche gemeinschaftlich hat, sie im Punkte (x') berührt.

Für einen der Fläche angehörenden Punkt (x') giebt also die Gleichung (4) die Bedingung dafür an, dafs der Punkt (x'') auf einer Geraden liegt, von welcher die Fläche (1) im Punkte (x') berührt wird. Da die Gleichung (4) auch befriedigt wird, wenn die Verbindungslinie der Punkte (x') und (x'') ganz auf der Fläche

liegt, müssen wir die auf der Fläche liegenden Geraden auch zu ihren Tangenten rechnen.

2. Indem wir den Punkt (x') als gegeben, den Punkt (x'') als veränderlich ansehen, stellt die Gleichung (4) die Bedingung dar, daſs der Punkt (x'') auf einer im Punkte (x') der Fläche (1) an sie gelegten Tangente liegt. Die Gleichung

$$(5) \quad \Sigma a_{ik} x_i' x_k = 0,$$

die auch in der Form geschrieben werden kann:

$$x_1 \Sigma a_{1k} x_k' + x_2 \Sigma a_{2k} x_k' + x_3 \Sigma a_{3k} x_k' + x_4 \Sigma a_{4k} x_k' = 0,$$

stellt eine Ebene dar. Wir können daher sagen: Alle Tangenten, die in einem gegebenen Punkte an eine Fläche zweiter Ordnung gelegt werden können, liegen in einer festen Ebene, der Tangentialebene des Punktes; die Gleichung der Tangentialebene des Punktes (x') an die Fläche (1) hat die Form (5).

3. Durch einen gegebenen Punkt 1 ziehen wir Sekanten an die Fläche zweiter Ordnung und lassen die zugehörige Sehne immer kleiner werden; dann rückt auch der dem Punkte 1 in Bezug auf die Schnittpunkte zugeordnete vierte harmonische Punkt immer näher an die Schnittpunkte heran. Geht also vom Punkte 1 eine Tangente der Fläche aus, so fällt der auf der Tangente liegende Pol des gegebenen Punktes mit dem Berührungspunkte zusammen.

Sollen umgekehrt die Punkte α und β harmonisch liegen zu den Punkten γ und δ, welche ihre Verbindungslinie mit der Fläche gemein hat, und soll der Punkt β mit dem Punkte δ zusammenfallen, ohne daſs α der Fläche angehört, so muſs auch γ mit δ zusammenfallen. Wenn daher von zwei konjugierten Polen einer Fläche zweiter Ordnung der eine der Fläche angehört, so muſs der andere auf einer Tangente liegen, die von dem ersten Punkte ausgeht. Zu einem Punkte der Fläche sind also alle diejenigen Punkte konjugierte Pole, welche auf einer die Fläche in dem gegebenen Punkte berührenden Geraden liegen. Die Polarebene eines Punktes der Fläche fällt mit ihrer Tangentialebene zusammen.

4. Hiernach geht die Polarebene zu einem Punkte der Fläche durch ihren Pol hindurch. Umgekehrt liegt jeder Punkt, der seiner Polarebene angehört, auf der Fläche. Die Gleichung $\Sigma a_{ik} x_i x_k' = 0$ stellt die Polarebene des Punktes (x') dar; soll der

Punkt (x′) in dieser Ebene liegen, so muſs die Gleichung auch erfüllt werden, wenn man in ihr $(x_1 \ldots x_4)$ durch $(x_1' \ldots x_4')$ ersetzt. Dadurch geht die Gleichung über in $\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa' = 0$, und daraus folgt, daſs der Punkt (x′) der Fläche angehört.

5. Wir suchen die Kurve, welche die Tangentialebene der Fläche im Punkte (x′) mit ihr gemeinschaftlich hat. Zu dem Ende nehmen wir auf der Tangentialebene noch zwei beliebige Punkte (x″) und (x‴) an und stellen die Koordinaten der übrigen Punkte dieser Ebene in der Form dar:

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_1'' + \lambda_3 x_1''' \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_4 &= \lambda_1 x_4' + \lambda_2 x_4'' + \lambda_3 x_4'''. \end{aligned}$$

Die Gleichung der Schnittlinie erhalten wir, indem wir diese Werte für $x_1 \ldots x_4$ in die Gleichung (1) einsetzen. In den ebenen Koordinaten λ_1, λ_2, λ_3 wird demnach die Gleichung dieser Kurve:

$$\begin{aligned} &\lambda_1^2 \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa' + \lambda_2^2 \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota'' x_\varkappa'' + \lambda_3^2 \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota''' x_\varkappa''' \\ &\quad + 2\lambda_1\lambda_2 \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa'' + 2\lambda_1\lambda_3 \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa''' \\ &\quad + 2\lambda_2\lambda_3 \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota'' x_\varkappa''' = 0. \end{aligned}$$

Weil aber der Punkt (x′) auf der Fläche liegt und die Punkte (x″) und (x‴) der Tangentialebene angehören, so muſs sein:

$$(6) \quad \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa' = 0, \ \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa'' = 0, \ \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa''' = 0.$$

Die Gleichung der Schnittlinie hat also die Form:

$$(7) \quad c_{22}\lambda_2^2 + 2c_{23}\lambda_2\lambda_3 + c_{33}\lambda_3^2 = 0;$$

sie stellt ein reelles oder imaginäres Linienpaar dar, dessen singulärer Punkt der Punkt $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ oder der Punkt (x′) ist.

Wenn umgekehrt eine Ebene mit der Fläche ein Linienpaar gemein hat, so wählt man den singulären Punkt als Punkt (x′), nimmt noch zwei beliebige andere Punkte (x″) und (x‴) hinzu und drückt die Koordinaten der Punkte der Ebene in der angegebenen Weise vermittelst der Gröſsen λ_1, λ_2, λ_3 aus. Da der Punkt (x′) oder der Punkt $(\lambda_2 = \lambda_3 = 0)$ der singuläre Punkt des Linienpaares sein soll, so muſs die Schnittlinie die Gleichung (7) haben. Demnach sind die Gleichungen (6) erfüllt oder die Punkte (x″) und (x‴) liegen auf der Tangentialebene des Punktes (x′).

Jede Tangentialebene an eine Fläche zweiter Ordnung hat mit ihr ein Linienpaar gemeinschaftlich, und

umgekehrt berührt eine Ebene die Fläche, sobald die Schnittlinie in ein Linienpaar übergeht.

6. Wenn ein Punkt sich auf einer Ebene bewegt, so dreht sich, wie wir im vorigen Paragraphen gesehen haben, seine Polarebene um den Pol der Ebene. Beschränken wir die Beweglichkeit so, daſs der Punkt stets auf der Schnittlinie der Ebene mit der Fläche verbleibt, so bleibt die Polarebene eine Tangentialebene; daher gehen die Tangentialebenen zu allen Punkten, in denen die Fläche von einer Ebene geschnitten wird, durch einen festen Punkt, den Pol der Ebene.

Umgekehrt liegen die Pole zu allen Ebenen, die durch einen festen Punkt gehen, in der Polarebene des Punktes. Speciell sind die Berührungspunkte für die durch einen festen Punkt gehenden Tangentialebenen die Schnittpunkte seiner Polarebene mit der Fläche.

Hiernach ergiebt sich der Satz:

Die Tangentialebenen, von denen die Fläche zweiter Ordnung in den Punkten eines Kegelschnitts berührt wird, gehen durch einen festen Punkt, den Pol der Ebene des Kegelschnitts, und alle durch einen festen Punkt gehenden Tangentialebenen berühren die Fläche längs der Schnittlinie mit seiner Polarebene.

7. Wie jeder Punkt π auf einer im Punkte α die Fläche berührenden Geraden Pol zum Berührungspunkte α ist, so ist umgekehrt der Berührungspunkt α einer jeden vom Punkte π ausgehenden Tangente Pol zum Punkte π. Daher liegen die Berührungspunkte aller dieser Tangenten in der Polarebene des Punktes π; sie gehören einem Kegelschnitte an, nämlich der Schnittlinie der Fläche mit der Polarebene des Punktes. Demnach sind alle vom Punkte π ausgehenden Tangenten Erzeugende eines Kegels zweiter Ordnung, welcher den Punkt zum Scheitel und den angegebenen Kegelschnitt zur Leitlinie hat.

Derjenige Kegel, welcher alle von einem festen Punkte ausgehenden Tangenten einer Fläche zu Erzeugenden hat, heiſst der Tangentialkegel des Punktes. Wir haben somit den Satz gefunden:

Der Tangentialkegel eines Punktes für eine Fläche zweiter Ordnung ist ein Kegel zweiter Ordnung, welcher

die Schnittlinie der Fläche mit der Polarebene des Punktes zur Leitlinie hat.

8. In Bezug auf die gegenseitige Lage von zwei reciproken Polaren sind drei Fälle möglich:

a) zwei solche Linien fallen zusammen,

b) sie schneiden einander,

c) sie haben keinen Punkt gemein, liegen also windschief zu einander.

Soll eine Gerade mit ihrer reciproken Polaren zusammenfallen, so mufs jeder ihrer Punkte in seiner Polarebene liegen; die Gerade mufs also der Fläche angehören. Umgekehrt ist jede auf der Fläche liegende Gerade ihre eigene Polare. Bewegt sich ein Punkt auf einer solchen Geraden, so dreht sich die Polarebene um die Gerade, und umgekehrt.

Wenn zwei reciproke Polaren einen Punkt gemeinschaftlich haben, so ist dieser Punkt konjugierter Pol zu den Punkten der beiden Geraden; also berührt die durch die beiden Geraden gelegte Ebene die Fläche in dem Schnittpunkte der beiden Geraden. Damit eine Gerade ihre reciproke Polare schneidet, mufs sie eine Tangente der Fläche sein.

9. Wir gehen jetzt dazu über, zwei reciproke Polare g und g′ zu betrachten, welche windschief zu einander liegen. Die Polarebenen zu den Punkten von g gehen durch g′, und die Pole zu allen durch g gelegten Ebenen liegen in g′. Soll eine durch g gelegte Ebene Tangentialebene sein, so mufs ihr Berührungspunkt auf g′ liegen, und umgekehrt geht jede Ebene, von welcher die Fläche in einem Schnittpunkte mit der Geraden g′ berührt wird, durch g hindurch. Da nach unserer Annahme die Geraden g und g′ weder ganz der Fläche angehören, noch dieselbe berühren, so schneidet jede von ihnen die Fläche in zwei reellen oder imaginären Punkten; demnach gehen auch durch jede der beiden Geraden zwei Tangentialebenen hindurch. Nun können wir eine der beiden Geraden ganz willkürlich wählen; wir erhalten also den Satz:

Durch jede Gerade des Raumes gehen im allgemeinen zwei Tangentialebenen der Fläche; durch eine Tangente läfst sich nur eine Tangentialebene legen, dagegen wird

die Fläche von jeder Ebene berührt, welche durch eine ganz in ihr gelegene Gerade hindurchgeht.

10. Zu demselben Resultate gelangen wir, wenn wir die Bedingung aufsuchen, unter der eine durch ihre Koordinaten gegebene Ebene Tangentialebene an die Fläche (1) ist. Diejenige Ebene, durch welche die Fläche im Punkte $(x_1' \ldots x_4')$ berührt wird, hat die Gleichung:

$$\begin{aligned} x_1 (a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + a_{13}x_3' + a_{14}x_4') \\ + x_2 (a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + a_{23}x_3' + a_{24}x_4') \\ + x_3 (a_{31}x_1' + a_{32}x_2' + a_{33}x_3' + a_{34}x_4') \\ + x_4 (a_{41}x_1' + a_{42}x_2' + a_{43}x_3' + a_{44}x_4') = 0. \end{aligned}$$

Die Koordinaten u_1, u_2, u_3, u_4 dieser Ebene müssen den Koefficienten der Gleichung proportional sein; es müssen daher die Gleichungen bestehen:

$$(8) \quad \begin{aligned} a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + a_{13}x_3' + a_{14}x_4' &= \varrho u_1 \\ a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + a_{23}x_3' + a_{24}x_4' &= \varrho u_2 \\ a_{31}x_1' + a_{32}x_2' + a_{33}x_3' + a_{34}x_4' &= \varrho u_3 \\ a_{41}x_1' + a_{42}x_2' + a_{43}x_3' + a_{44}x_4' &= \varrho u_4. \end{aligned}$$

Wenn die Determinante

$$(9) \quad A = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{14} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{41} & \ldots & a_{44} \end{vmatrix}$$

von null verschieden ist, so ergeben sich aus der vorstehenden Gleichung die folgenden:

$$(10) \quad \begin{aligned} Ax_1' &= \varrho (A_{11}u_1 + A_{21}u_2 + A_{31}u_3 + A_{41}u_4) \\ Ax_2' &= \varrho (A_{12}u_1 + A_{22}u_2 + A_{32}u_3 + A_{42}u_4) \\ Ax_3' &= \varrho (A_{13}u_1 + A_{23}u_2 + A_{33}u_3 + A_{43}u_4) \\ Ax_4' &= \varrho (A_{14}u_1 + A_{24}u_2 + A_{34}u_3 + A_{44}u_4), \end{aligned}$$

wo jedesmal A_{ix} gleich ist dem Koefficienten von a_{ix} in der Determinante A. Zugleich ist $A_{ix} = A_{xi}$.

Nun liegt der Punkt (x') als Berührungspunkt in der Ebene (u), also besteht die Gleichung:

$$(11) \quad u_1x_1' + u_2x_2' + u_3x_3' + u_4x_4' = 0.$$

Wenn wir also die Gleichungen (10) der Reihe nach mit u_1, u_2, u_3, u_4 multiplizieren und die Produkte addieren, so verschwindet die linke Seite; man erhält also die Gleichung:

$$(12)\quad \begin{aligned} & u_1 (A_{11}u_1 + A_{21}u_2 + A_{31}u_3 + A_{41}u_4) \\ & + u_2 (A_{12}u_1 + A_{22}u_2 + A_{32}u_3 + A_{42}u_4) \\ & + u_3 (A_{13}u_1 + A_{23}u_2 + A_{33}u_3 + A_{43}u_4) \\ & + u_4 (A_{14}u_1 + A_{24}u_2 + A_{34}u_3 + A_{44}u_4) = 0 \end{aligned}$$

oder

$$(13)\quad \begin{aligned} & A_{11}u_1^2 + A_{22}u_2^2 + A_{33}u_3^2 + A_{44}u_4^2 \\ & + 2A_{12}u_1u_2 + 2A_{13}u_1u_3 + 2A_{14}u_1u_4 \\ & + 2A_{23}u_2u_3 + 2A_{24}u_2u_4 + 2A_{34}u_3u_4 = 0 \end{aligned}$$

oder kurz

$$(14)\quad \Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota u_\varkappa = 0.$$

Ist die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung in Punktkoordinaten

$$\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa = 0,$$

und ist die Determinante ihrer Koefficienten von null verschieden, so ist die Gleichung der Fläche in Ebenenkoordinaten

$$\Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota u_\varkappa = 0,$$

wo jeder Koefficient $A_{\iota\varkappa}$ die zu $a_{\iota\varkappa}$ gehörende Unterdeterminante ist.

11. Dieser Satz kann erst dann als vollständig erwiesen gelten, nachdem gezeigt ist, dafs jede Ebene, deren Koordinaten der Gleichung (14) genügen, eine Tangentialebene der Fläche (1) ist. Davon überzeugt man sich durch folgende Erwägung. Aus den gegebenen Werten $(u_1 \ldots u_4)$ kann man vermittelst der Gleichungen (10) die Verhältnisse $x_1' : x_2' : x_3' : x_4'$ berechnen; diese Gleichungen kommen aber auf die Gleichungen (8) hinaus; folglich ist der Punkt (x') der Pol der Ebene (u). Jetzt schreibe man die Gleichung (14) in der Form (12) und ersetze die einzelnen Klammerausdrücke durch $\frac{Ax_1'}{\varrho}, \frac{Ax_2'}{\varrho}, \frac{Ax_3'}{\varrho}, \frac{Ax_4'}{\varrho}$; dadurch geht diese Gleichung in die Gleichung (11) über, welche besagt, dafs der Punkt (x') in seiner Polarebene und somit (nach 6.) in der Fläche liegt.

12. Um die Gleichung der Fläche (1) in Ebenenkoordinaten darzustellen, können wir auch folgenden Weg einschlagen. Mit den Gleichungen (8) stellen wir die Gleichung (11) zusammen. Dadurch erhalten wir fünf homogen lineare Gleichungen mit den Unbekannten x_1', x_2', x_3', x_4', und $-\varrho$. Diese können nur dann

mit einander bestehen, wenn die aus ihren Koefficienten gebildete Determinante gleich null ist. Demnach erscheint die Beziehung zwischen den Koordinaten einer Tangentialebene (d. h. mit andern Worten, die Gleichung der Fläche in Ebenenkoordinaten) in der Form:

$$(15)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & u_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & u_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Man überzeugt sich leicht, dafs diese Gleichung mit (13) identisch ist.

13. Man sagt, eine Fläche sei von der n^{ten} Klasse, wenn die Bestimmung der durch eine beliebige Gerade gehenden Tangentialebenen auf eine Gleichung n^{ten} Grades führt. Sind (u′) und (u″) zwei beliebige Ebenen, so findet man die Koordinaten der durch ihre Schnittlinie an die Fläche (14) gelegten Tangentialebenen, indem man in der Gleichung (14) die Koordinaten u_1, u_2, u_3, u_4 der Reihe nach durch $u_1' + \omega u_1''$, $u_2' + \omega u_2''$, $u_3' + \omega u_3''$, $u_4' + \omega u_4''$ ersetzt. Dadurch geht diese Gleichung über in:

$$\omega^2 \Sigma A_{ix}\, u_i'' u_x'' + 2\omega \Sigma A_{ix}\, u_i' u_x'' + \Sigma A_{ix}\, u_i' u_x' = 0.$$

Da diese Gleichung in ω vom zweiten Grade ist, lassen sich im allgemeinen durch eine Gerade zwei Tangentialebenen an die gegebene Fläche legen. Dies Resultat, welches wir in 9. auf einem andern Wege gefunden haben, drücken wir jetzt in folgender Weise aus:

Jede eigentliche Fläche zweiter Ordnung ist auch von der zweiten Klasse.

Übungen:

1) Man stelle für die folgenden Flächen die Gleichung der Tangentialebene in jedem der angegebenen Punkte auf:

a) an die Fläche $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$ in den Punkten (1, 0, 0, 1), (1, 0, 0, −1), (1, 2, 2, 3), (1, −2, 2, −3);

b) an die Fläche $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$ in den Punkten (1, 0, 0, 1), (1, 0, −1, 0), (1, 1, 1, 1), (1, 2, −2, 1);

c) an die Fläche $x_1 x_2 - x_3 x_4 = 0$ in den Punkten (1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1), (1, −1, −1, 1).

Man gebe in den einzelnen Fällen die Kurve an, welche die Tangentialebene mit der Fläche gemeinschaftlich hat.

2) Man gebe die Gleichung des Tangentialkegels an, welcher an die folgenden Flächen von je einem Eckpunkte des Koordinaten-Tetraeders gelegt werden kann:

a) an die Fläche $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$,

b) an die Fläche $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$,

c) an die Fläche

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 - x_3^2 + 6x_3x_4 + x_4^2 = 0.$$

d) an die Fläche

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 6x_3x_4 - 4x_4^2 = 0.$$

3) Man bestimme die reciproken Polaren der Kanten des Koordinaten-Tetraeders für die unter 2) angegebenen Flächen.

4) Man gebe die Tangentialebenen an eine der unter 2) mitgeteilten Flächen an, welche durch je eine Kante des Koordinaten-Tetraeders gehen.

5) Man stelle die in 2) angegebenen Flächen in den zugehörigen Ebenenkoordinaten dar, sowie die Flächen:

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2 = 0,$$
$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + 2a_3x_1x_3 = 0,$$
$$a_{12}x_1x_2 + a_{34}x_3x_4 = 0.$$

6) Gehören alle Punkte einer geraden Linie einer Fläche zweiter Ordnung an, so gehen auch die Tangentialebenen, die in den Punkten der Geraden berühren, durch diese Linie hindurch.

7) Wenn die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung in der Form $f(x_1 \ldots x_4) = 0$ gegeben ist, so ist die Gleichung der Tangentialebene der Fläche im Punkte (x'):

$$x_1 f(x_1') + x_2 f(x_2') + x_3 f(x_3') + x_4 f(x_4') = 0$$

oder

$$x_1' f(x_1) + x_2' f(x_2) + x_3' f(x_3) + x_4' f(x_4) = 0.$$

8) Die Tangentialebenen einer eigentlichen Fläche zweiter Ordnung in den Punkten (ξ), (η), (ζ), (ϑ) haben nur dann einen Punkt gemeinschaftlich, wenn die vier Berührungspunkte in einer Ebene liegen.

Aus welchem Satze des Textes folgt unmittelbar die Richtigkeit dieser Behauptung? Ein zweiter Beweis ergiebt sich aus der zweiten in Übung 7) angegebenen Form der Gleichung der Tangentialebene. Einen dritten Beweis stütze man auf folgende

Erwägung unter Benutzung der ersten Form: Damit die Tangentialebenen durch einen Punkt gehen, mufs die Determinante

$$\begin{vmatrix} f(\xi_1) & \dots & f(\xi_4) \\ f(\eta_1) & \dots & f(\eta_4) \\ f(\zeta_1) & \dots & f(\zeta_4) \\ f(\vartheta_1) & \dots & f(\vartheta_4) \end{vmatrix}$$

verschwinden; diese ist aber das Produkt aus der nicht verschwindenden Determinante A in die aus den Koordinaten der vier Punkte gebildete Determinante.

§ 14.

Polartetraeder einer Fläche zweiter Ordnung.

1. Wir legen unserer Untersuchung wieder eine eigentliche Fläche zweiter Ordnung zu Grunde und denken ihre Gleichung wieder in der Form (1) § 13 gegeben. Die aus den Koefficienten dieser Gleichung gebildete Determinante soll also von null verschieden sein. Wenn ein Punkt 1 der Fläche nicht angehört, so geht seine Polarebene nicht durch ihn hindurch; auch kann diese Ebene nicht ganz der Fläche angehören. Sobald man daher den Punkt 2 in dieser Ebene I so wählt, dafs er nicht der Schnittlinie angehört, geht seine Polarebene II durch den Punkt 1, aber nicht durch den Punkt 2 hindurch. Auch ist die Schnittlinie der Ebenen I und II nicht ihre eigene Polare, kann also (nach § 13, 8) nicht ganz in der Fläche liegen. Man wählt in dieser Geraden einen Punkt 3 so, dafs er der Fläche nicht angehört; die Polarebene III von 3 geht durch die Punkte 1 und 2, aber nicht durch den Punkt 3 hindurch. Der Schnittpunkt 4 der Ebenen I, II, III liegt nicht in der die drei Punkte 1, 2, 3 verbindenden Ebene IV. Da er aber zu den Punkten 1, 2, 3 konjugierter Pol ist, so ist die Ebene IV die Polarebene des Punktes 4. Jetzt liegen

die Punkte 2, 3, 4 in der Ebene I,
die Punkte 1, 3, 4 in der Ebene II,
die Punkte 1, 2, 4 in der Ebene III,
die Punkte 1, 2, 3 in der Ebene IV.

Die vier Punkte sind also die Ecken eines Tetraeders, von dem jeder Eckpunkt der Pol der durch die drei andern Ecken

gelegten Ebene ist. Ein Tetraeder, welches diese Eigenschaft hat, heifst ein Polartetraeder der Fläche, auch wohl ein zu sich selbst reciprokes Tetraeder.

2. Einen Eckpunkt des Tetraeders kann man ganz willkürlich wählen; nur sind die Punkte der Fläche auszuschliefsen. Der zweite Eckpunkt mufs dann auf einer bestimmten Ebene liegen, hat aber auf ihr im wesentlichen eine willkürliche Lage. Nachdem die beiden ersten Punkte gewählt sind, kann man den dritten Eckpunkt nur noch in einer geraden Linie wählen. Nach der Wahl der drei ersten Eckpunkte ist der vierte vollständig bestimmt.

Die Lage eines Punktes im Raume hängt von drei willkürlichen Gröfsen ab; ebenso wird die Lage eines Punktes in der Ebene durch zwei, und die Lage in einer Geraden durch eine willkürliche Gröfse bestimmt. Bei der Bestimmung der Lage eines Polartetraeders einer gegebenen Fläche zweiter Ordnung kann man über sechs Gröfsen willkürlich verfügen.

Der in I § 15, 2 (S. 93) getroffenen Festsetzung entsprechend, bildet die Gesamtheit der Polartetraeder einer Fläche zweiter Ordnung eine sechsfache Unendlichkeit.

3. Statt von den Eckpunkten dürfen wir auch von den Ebenen eines Polartetraeders ausgehen. Wir dürfen die Ebene I willkürlich wählen, wenn wir nur die Tangentialebenen der Fläche ausschliefsen. Dann müssen die drei andern Ebenen durch einen bestimmten Punkt 1 hindurchgehen. Nachdem wir aber die Ebene II beliebig so gewählt haben, dafs sie durch den Punkt 1 hindurchgeht und die Fläche nicht berührt, mufs die Ebene III einem bestimmten Büschel angehören. Nach Annahme der Ebenen I, II, III ist die Ebene IV vollständig bestimmt.

Auch bei dieser Art der Bestimmung überzeugt man sich, dafs die Gesamtheit der Polartetraeder eine sechsfache Unendlichkeit bildet.

4. Wenn ein Polartetraeder zum Koordinatentetraeder gewählt wird, so nimmt die Gleichung der Fläche eine bemerkenswerte Form an. Wie wir früher (§ 11, 4) gesehen haben, bleibt die Gleichung auch in den neuen Koordinaten homogen vom zweiten Grade. Wenn wir die neuen Koordinaten y_1, y_2, y_3, y_4 nennen, so wird die Gleichung:

$$\Sigma\, b_{ik}\, y_i\, y_k = 0.$$

Jetzt sollen die Punkte (1, 0, 0, 0) und (0, 1, 0, 0) konjugierte Pole zur Fläche sein; es mufs daher die Gleichung

$$\Sigma b_{ik} y_i' y_k'' = 0$$

befriedigt werden, wenn man $y_1' = 1$, $y_2' = y_3' = y_4' = 0$ und $y_2'' = 1$, $y_1'' = y_3'' = y_4'' = 0$ setzt. Hiernach mufs $b_{12} = 0$ sein. Da aber irgend zwei Eckpunkte des Polartetraeders konjugierte Pole für die Fläche sind, so ist auch

$$b_{13} = b_{14} = b_{23} = b_{24} = b_{34} = 0.$$

Es bleiben nur die vier Koefficienten b_{11}, b_{22}, b_{33}, b_{44}. Von diesen darf keiner gleich null sein, weil sonst die Determinante aus den Koefficienten verschwindet. Die Gleichung der Fläche in den neuen Koordinaten ist also

$$(1) \quad b_{11}y_1^2 + b_{22}y_2^2 + b_{33}y_3^2 + b_{44}y_4^2 = 0.$$

5. Wenn umgekehrt in der Gleichung der Fläche nur die vier Quadrate der Variabeln vorkommen, so bilden die Koordinatenebenen ein Polartetraeder der Fläche. Hat nämlich die Gleichung die Form (1), so ist die Polarebene des Punktes (1, 0, 0, 0) die Ebene $y_1 = 0$, die des Punktes (0, 1, 0, 0) die Ebene $y_2 = 0$, die des Punktes (0, 0, 1, 0) die Ebene $y_3 = 0$ und die des Punktes (0, 0, 0, 1) die Ebene $y_4 = 0$. Jeder Eckpunkt des Tetraeders hat also die gegenüberliegende Seite zur Polarebene.

6. Indem wir

$$y_1\sqrt{b_{11}} = z_1, \quad y_2\sqrt{b_{22}} = z_2, \quad y_3\sqrt{b_{33}} = z_3, \quad y_4\sqrt{b_{44}} = z_4$$

setzen, geht die Gleichung über in

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 0.$$

Demnach ist durch die vorstehende Untersuchung die Aufgabe gelöst:

Eine homogene quadratische Form $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ in den vier Variabeln $x_1 \ldots x_4$ als Summe von vier Quadraten darzustellen.

Man betrachtet diejenige Fläche, deren Gleichung durch das Verschwinden der gegebenen Form erhalten wird. Zu dieser Fläche sucht man ein beliebiges Polartetraeder und setzt die Gleichung der vier Ebenen dieses Tetraeders der Reihe nach gleich $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$, $y_4 = 0$. Alsdann kann man vier reelle oder imaginäre Konstante m_1, m_2, m_3, m_4 derartig bestimmen, dafs für

$$z_1 = m_1y_1, \quad z_2 = m_2y_2, \quad z_3 = m_3y_3, \quad z_4 = m_4y_4$$

die gegebene Form der Summe der Quadrate von z_1, z_2, z_3, z_4 identisch gleich wird, daſs also ist:

$$\Sigma a_{ix} x_i x_x = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2.$$

Zugleich erkennt man, daſs die neuen Gröſsen $z_1 \ldots z_4$ homogen lineare Ausdrücke in $x_1 \ldots x_4$ sind, deren Koefficienten noch sechs willkürliche Gröſsen enthalten.

7. Wenn die unendlichferne Ebene keine Tangentialebene an die Fläche ist, so darf ihr Pol der Ebene nicht angehören; er muſs also ein eigentlicher Punkt sein. Wir nennen ihn den Mittelpunkt der Fläche, weil jede hindurchgehende Sehne, jeder Durchmesser der Fläche, in ihm halbiert wird. Die vom Mittelpunkte ausgehenden Tangenten der Flächen erzeugen (nach § 13, 6) einen Kegel, den Asymptotenkegel der Fläche. Jede Ebene, welche in einem unendlichfernen Punkte die Fläche berührt, geht durch den Mittelpunkt.

Jede eigentliche Fläche zweiter Ordnung, die von der unendlichfernen Ebene nicht berührt wird und aus diesem Grunde einen Mittelpunkt besitzt, heiſst eine Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung.

8. Da man jede Ebene, von welcher die Fläche nicht berührt wird, als die eine Ebene eines Polartetraeders wählen kann, so darf man für eine Mittelpunktsfläche die unendlichferne Ebene einem Polartetraeder angehören lassen. Dann fällt der ihr gegenüberliegende Eckpunkt mit dem Mittelpunkte zusammen. Das Polartetraeder hat in diesem Falle einen eigentlichen und drei uneigentliche Eckpunkte, drei eigentliche und eine uneigentliche Seiten, drei eigentliche und drei uneigentliche Kanten. Die drei eigentlichen Kanten gehen vom Mittelpunkte aus; sie bilden ein Tripel konjugierter Durchmesser. Die Ebene, welche durch irgend zwei dieser Durchmesser gelegt werden kann, heiſst die zum dritten Durchmesser konjugierte Durchmesserebene.

Es giebt dreifach unendlichviele Tripel konjugierter Durchmesser. Denn einer der drei Durchmesser kann ganz willkürlich gewählt werden, wofern nur die Erzeugenden des Asymptotenkegels ausgeschlossen werden. Dadurch ist die konjugierte Durchmesserebene bestimmt; in ihr darf der zweite Durchmesser noch beliebig gewählt werden.

Indem man drei konjugierte Durchmesser zu Axen eines Cartesischen Koordinatensystems nimmt, wird die Gleichung der Fläche:

$$(5) \quad \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1.$$

9. Aus dem Begriff der konjugierten Durchmesser folgen unmittelbar die beiden Sätze:

Alle Sehnen, welche zu einem Durchmesser parallel sind, werden durch die konjugierte Durchmesserebene halbiert.

Die Mittelpunkte der Kurven, in denen eine Fläche zweiter Ordnung von parallelen Ebenen geschnitten wird, liegen auf einem Durchmesser.

Da jede durch eine Gerade gelegte Ebene ihren Pol in der konjugierten Polaren hat, gelten die folgenden Sätze:

Die Polarebenen zu den auf einem Durchmesser gelegenen Punkten sind unter einander und zu der konjugierten Durchmesserebene parallel.

Die Ebene, in welcher die Berührungspunkte der von einem festen Punkte ausgehenden Tangenten liegen, ist parallel zu der Durchmesserebene, welche zu dem nach dem Punkte führenden Durchmesser konjugiert ist.

Der nach der Spitze eines Tangentialkegels führende Durchmesser geht durch den Mittelpunkt desjenigen Kegelschnitts, längs dessen der Kegel berührt.

Alle Tangenten, welche einer festen Richtung parallel sind, berühren längs der Schnittlinie derjenigen Durchmesserebene, welche zu dem in der gegebenen Richtung gezogenen Durchmesser konjugiert ist.

Parallele Tangentialebenen berühren in den Endpunkten desjenigen Durchmessers, welcher konjugiert ist zu der den Tangentialebenen parallelen Durchmesserebene.

Die Ebenen derjenigen Kegelschnitte, längs deren die von verschiedenen Punkten desselben Durchmessers ausgehenden Tangentialkegel berühren, sind zur konjugierten Durchmesserebene parallel.

10. Jeder Kegel, dessen Scheitel im Unendlichfernen liegt, heifst ein Cylinder. Derselbe entsteht, indem sich eine gerade Linie längs einer gegebenen Kurve, der Leitlinie, so bewegt, dafs

sie stets einer festen Richtung parallel bleibt. Der Cylinder zweiter Ordnung hat eine Kurve zweiter Ordnung zur Leitlinie.

Aus § 13 ergiebt sich, dafs alle Tangenten an eine Fläche zweiter Ordnung, welche zu einer festen Richtung parallel sind, als Erzeugende einem Cylinder zweiter Ordnung angehören und längs der Schnittlinie mit einer Ebene, der Polarebene des unendlichfernen Scheitels, berühren. Hat die Fläche einen Mittelpunkt, so geht diese Ebene durch ihn hindurch, und der zu der Ebene konjugierte Durchmesser ist der Kante des Cylinders parallel. Man sagt in diesem Falle auch, der Cylinder berühre die Fläche.

Übungen:

1) Man bestimme Polartetraeder zu folgenden Flächen:

a) $x_1x_2 + x_3x_4 = 0$.

b) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_3x_4 + x_4^2 = 0$,

c) $x_1^2 + x_2^2 - 2x_3x_4 = 0$.

2) a) Wenn zwei Eckpunkte eines Polartetraeders der Fläche

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2 = 0$$

auf der Geraden $x_1 = x_2 = 0$ gewählt sind, wo liegen die beiden andern?

b) Wenn der eine Eckpunkt ist $(0, 0, 1, \alpha)$, darf man dann als zweiten den Punkt $(\beta, 1, 0, 0)$ wählen, und welche Punkte darf man als dritten und vierten Eckpunkt wählen?

3) a) Man stelle die allgemeine quadratische Form $\Sigma a_{\iota\varkappa}x_\iota x_\varkappa$ in den Variabeln $x_1 \ldots x_4$ durch vier Quadrate dar.

(Wenn $a_{11} \neq 0$ ist, so ist

$$\Sigma a_{\iota\varkappa}x_\iota x_\varkappa - \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4)^2 = b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + b_{44}x_4^2 + 2b_{23}x_2x_3 + 2b_{24}x_2x_4 + 2b_{34}x_3x_4.$$

Ist hier auch $b_{22} \neq 0$, so ist die rechte Seite gleich

$$\frac{1}{b_{22}}(b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + b_{24}x_4)^2 + c_{33}x_3^2 + 2c_{34}x_3x_4 + c_{44}x_4^2$$

u. s. w. Man drücke die Koefficienten $b_{\iota\varkappa}$, $c_{\iota\varkappa}$ durch die gegebenen Koefficienten aus.)

b) Man führe dieselbe Operation mit der Form

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 8x_3x_4 + x_4^2$$

und mit der Form

$$2x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 - 2x_1x_4 + 4x_3x_4 - x_4^2$$

aus.

4) Man suche für die Fläche

$$x_1^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 - 3x_1x_4 + 3x_2^2 - 4x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3^2 - 5x_3x_4 + 4x_4^2 = 0$$

ein Polartetraeder, von dem ein Eckpunkt in den Eckpunkt O_4, ein zweiter in die Kante O_3O_4 des Koordinaten-Tetraeders fällt.

5) a) Welches ist die konjugierte Polare zu einem Durchmesser einer Fläche zweiter Ordnung?

b) Wie liegen die Polarebenen zu den Punkten eines Durchmessers?

c) Wenn zwei Punkte eines Durchmessers gleich weit vom Mittelpunkte entfernt sind, welche Lage haben ihre Polarebenen zu der konjugierten Durchmesserebene?

6) a) Die Gleichung einer Fläche in Cartesischen Koordinaten sei

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1;$$

man soll die zum Durchmesser $x' : y' : z'$ konjugierte Durchmesserebene angeben.

b) Man bestimme mehrere Tripel von konjugierten Durchmessern.

7) a) Wenn von zwei Durchmessern der erste in der zum zweiten konjugierten Durchmesserebene liegt, so gehört auch der zweite der dem ersten zugeordneten Durchmesserebene an. Zwei solche Durchmesser heifsen konjugierte Durchmesser der Fläche.

b) Welche Eigenschaft haben zwei konjugierte Durchmesser für den Kegelschnitt, welchen ihre Verbindungsebene aus der Fläche ausschneidet?

c) Konjugierte Durchmesser einer Fläche zweiter Ordnung sind konjugierte Polare für den Asymptotenkegel der Fläche.

8) Man gebe die allgemeinen Sätze an, von denen die in 9. mitgeteilten Lehrsätze nur besondere Fälle sind.

9) a) Alle Tangenten an eine Fläche zweiter Ordnung, welche zu einer festen Richtung parallel sind, liegen auf einem Cylinder zweiter Ordnung.

b) Die Berührungspunkte aller Tangenten an eine Fläche zweiter Ordnung, welche zu einem festen Durchmesser parallel sind, liegen in der zu dem Durchmesser konjugierten Durchmesserebene.

c) Durch alle Punkte der Schnittlinie einer Fläche zweiter Ordnung mit einer ihrer Durchmesserebenen kann man Tangenten an die Fläche legen, welche dem zur Ebene konjugierten Durchmesser parallel sind.

d) Die Tangentialebenen in der Schnittkurve einer Fläche zweiter Ordnung mit einer ihrer Durchmesserebenen umhüllen einen Cylinder zweiter Ordnung, dessen Kanten parallel sind dem zur Ebene konjugierten Durchmesser.

e) Alle Tangentialebenen an eine Fläche zweiter Ordnung, welche mit der Schnittlinie von zweien ihrer Tangentialebenen keinen (eigentlichen) Punkt gemein haben, berühren in Punkten derjenigen Durchmesserebene, welche durch die Berührungspunkte der gegebenen Ebenen gelegt werden können.

10) a) Wenn eine gerade Linie zwei reciproke Polaren einer Fläche zweiter Ordnung schneidet, so liegen die Schnittpunkte mit den geraden Linien harmonisch zu den Schnittpunkten mit der Fläche.

b) Jede Sehne, welche durch einen Punkt eines Durchmessers parallel zur konjugierten Durchmesserebene gelegt ist, wird in dem Punkte halbiert.

11) a) Wenn zwei gerade Linien g und h einander schneiden, so schneiden sich auch diejenigen geraden Linien g′ und h′, welche zu ihnen in Bezug auf eine gegebene Fläche zweiter Ordnung konjugierte Polare sind. Zugleich ist der Schnittpunkt der Geraden g und h der Pol der durch g′ und h′ gelegten Ebene, und der Schnittpunkt der Geraden g′ und h′ der Pol der Ebene (g, h).

b) Die reciproke Polare einer Tangente an eine Fläche zweiter Ordnung berührt in demselben Punkte, wie die erste Gerade.

c) Wenn eine gerade Linie sich so bewegt, dafs sie stets Tangente an die Schnittkurve einer festen Ebene mit einer gegebenen Fläche zweiter Ordnung bleibt, so beschreibt ihre konjugierte Polare einen Kegel zweiter Ordnung, welcher die Fläche längs jener Kurve berührt; umgekehrt sind die reciproken Polaren

zu den Erzeugenden eines Tangentialkegels der Fläche Tangenten an diejenige ebene Kurve, längs deren der Kegel berührt.

d) Wie ändert sich der in c) aufgestellte Satz, wenn die Ebene der ersten Kurve durch den Mittelpunkt der Fläche geht?

e) Wenn eine Gerade a zwei konjugierte Polare s und s' trifft, so begegnet auch die reciproke Polare a' von a denselben beiden Geraden.

(Die Polarebene des Schnittpunktes von a und s geht durch die Geraden a' und s'.)

f) Wenn von einem Tetraeder zwei Paare Gegenkanten konjugierte Polare in Bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung sind, so sind auch die Kanten des dritten Paares konjugierte Polare und das Tetraeder selbst ist ein Polartetraeder.

§ 15.

Der Kegel zweiter Ordnung.

1. Bisher haben wir angenommen, dafs die vier Gleichungen (5) § 12, 2 (S. 87) nicht durch die Koordinaten eines Punktes befriedigt werden können. Wir wollen jetzt den Ausnahmefall ins Auge fassen und voraussetzen, es gebe einen Punkt (ξ), für den die Gleichungen erfüllt sind:

$$(1)\quad \begin{aligned} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3 + a_{14}\xi_4 &= 0\\ a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + a_{23}\xi_3 + a_{24}\xi_4 &= 0\\ a_{31}\xi_1 + a_{32}\xi_2 + a_{33}\xi_3 + a_{34}\xi_4 &= 0\\ a_{41}\xi_1 + a_{42}\xi_2 + a_{43}\xi_3 + a_{44}\xi_4 &= 0. \end{aligned}$$

Einen solchen Punkt nennen wir einen singulären Punkt der Fläche:

$$(2)\quad \Sigma a_{ik} x_i x_k = 0.$$

Wir beschränken uns zunächst auf den Fall, dafs die Gleichungen (1) nur eine einzige Lösung haben oder dafs alle ihnen genügenden Wertsysteme aus einem einzigen durch Multiplikation mit demselben Faktor erhalten werden; für die Fläche soll also nur ein einziger singulärer Punkt existieren.

2. Da die Gleichung:

$$(3)\quad \Sigma a_{ik} x_i \xi_k = 0$$

auch geschrieben werden kann:

$$x_1 \Sigma a_{1k}\xi_k + x_2 \Sigma a_{2k}\xi_k + x_3 \Sigma a_{3k}\xi_k + x_4 \Sigma a_{4k}\xi_k = 0,$$

und diese wegen der Gleichungen (1) für alle Wertsysteme (x) befriedigt wird, so folgt unmittelbar, dafs zum singulären Punkte der Fläche jeder Punkt des Raumes konjugierter Pol ist.

Die letzte Gleichung wird auch befriedigt, wenn man die Koordinaten $x_1 \dots x_4$ durch $\xi_1 \dots \xi_4$ ersetzt; dasselbe darf auch in der Gleichung (3) geschehen, oder es besteht die Gleichung:

$$\Sigma a_{\iota\varkappa} \xi_\iota \xi_\varkappa = 0,$$

welche aussagt, dafs der singuläre Punkt der Fläche angehört.

Da die Gleichungen (1) nur für den Punkt (ξ) befriedigt werden, so stellt die Gleichung

$$(4)\quad x_1 \Sigma a_{1\varkappa} x_\varkappa' + x_2 \Sigma a_{2\varkappa} x_\varkappa' + x_3 \Sigma a_{3\varkappa} x_\varkappa' + x_4 \Sigma a_{4\varkappa} x_\varkappa' = 0$$

oder die Gleichung

$$(4')\quad \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa' = 0$$

für jeden vom singulären Punkte verschiedenen Punkt eine Ebene dar; jeder Punkt mit alleiniger Ausnahme des singulären Punktes hat eine bestimmte Polarebene.

Der Gleichung (4) genügt man, wenn man darin die Koordinaten $(x_1 \dots x_4)$ durch $(\xi_1 \dots \xi_4)$ ersetzt, weil man die Gleichung auch in der Form

$$x_1' \Sigma a_{1\varkappa} x_\varkappa + x_2' \Sigma a_{2\varkappa} x_\varkappa + x_3' \Sigma a_{3\varkappa} x_\varkappa + x_4' \Sigma a_{4\varkappa} x_\varkappa = 0$$

schreiben kann und in dieser Gleichung die Koefficienten von $x_1' \dots x_4'$ nach der angegebenen Vertauschung null werden. Somit geht die Polarebene eines jeden Punktes durch den singulären Punkt.

3. Offenbar ist für beliebige Werte von μ und ν:

$$\Sigma a_{\iota\varkappa} (x_\iota' + \mu\xi_\iota)(x_\varkappa'' + \nu\xi_\varkappa) =$$
$$\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa'' + \mu \Sigma a_{\iota\varkappa} \xi_\iota x_\varkappa'' + \nu \Sigma a_{\iota\varkappa} \xi_\iota x_\varkappa' + \mu\nu \Sigma a_{\iota\varkappa} \xi_\iota \xi_\varkappa.$$

Hier verschwinden die Koefficienten von μ, ν und von $\mu\nu$. Sobald also

$$(5)\quad \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa'' = 0$$

ist, mufs auch

$$(6)\quad \Sigma a_{\iota\varkappa} (x_\iota' + \mu\xi_\iota)(x_\varkappa'' + \mu\xi_\varkappa) = 0$$

sein. Die Gleichung (5) sagt aus, dafs die Punkte (x') und (x'') konjugierte Pole in Bezug auf die Fläche sind. Der Punkt $(x' + \mu\xi)$ ist ein beliebiger Punkt auf der Verbindungslinie des Punktes (x') mit dem singulären Punkte, und ebenso liegt der Punkt $(x'' + \nu\xi)$ auf der Geraden, welche den Punkt (x'') mit dem

singulären Punkte verbindet. Hiernach folgt aus der Gleichung (6), daſs, sobald auf zwei vom singulären Punkte ausgehenden Geraden zwei konjugierte Pole liegen, auch jeder Punkt der einen Geraden konjugierter Pol zu jedem Punkte der andern ist.

Somit haben alle Punkte einer beliebigen, durch den singulären Punkt gehenden Geraden dieselbe Polarebene. Man sieht dies auch an der Gestalt der Gleichung. Die Polarebene des Punktes $(x' + \mu\xi)$ hat die Gleichung:

$$\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota (x_\varkappa' + \mu\xi_\varkappa) = 0.$$

Da hier $\Sigma_{\iota\varkappa} x_\iota \xi_\varkappa$ wegen der Gleichungen (1) verschwindet, so wird die vorstehende Gleichung mit (4′) identisch.

4. Auch erkennt man hieraus, daſs jede gerade Linie, welche einen Punkt (x') der Fläche mit dem singulären Punkte verbindet, ganz der Fläche angehört, und daſs die Polarebene zu einem beliebigen Punkte der Fläche auch seine Verbindungslinie mit dem singulären Punkte enthält. Will man diesen Satz direkt beweisen, so nimmt man an, daſs

$$\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa' = 0$$

ist, und folgert daraus in der angegebenen Weise, daſs auch

$$\Sigma a_{\iota\varkappa} (x_\iota' + \mu\xi_\iota) (x_\varkappa' + \mu\xi_\varkappa) = 0$$

ist. Unter der gemachten Annahme wird also auch die Gleichung (2) für die Koordinaten $(x_1' + \mu\xi_1 \ldots x_4' + \mu\xi_4)$ befriedigt.

Nun schneidet eine beliebige Ebene die Fläche in einer Kurve zweiter Ordnung. Die Fläche entsteht also dadurch, daſs man den singulären Punkt mit allen Punkten eines Kegelschnittes verbindet; sie ist ein Kegel zweiter Ordnung.

Jede Fläche zweiter Ordnung, welche einen singulären Punkt enthält, ist eine Kegelfläche.

5. Die Gleichungen (1) sind nur dann mit einander vereinbar, wenn die aus ihren Koefficienten gebildete Determinante gleich null ist, wenn also die Gleichung befriedigt wird:

$$(7) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Wenn umgekehrt die aus den Koefficienten der Gleichung (2) gebildete Determinante verschwindet, ohne daſs ihre sämtlichen dreireihigen Unterdeterminanten gleich null sind, so haben die

Gleichungen (1) nur eine einzige Lösung; es gelten also die bisher abgeleiteten Resultate. Wir können demnach den Satz aussprechen:

Wenn die aus den Koefficienten einer quadratischen Gleichung in räumlichen Punktkoordinaten gebildete Determinante gleich null ist, ohne dafs ihre sämtlichen dreireihigen Unterdeterminanten verschwinden, so stellt die Gleichung einen Kegel zweiter Ordnung dar, dessen Scheitel mit dem singulären Punkte der Fläche zusammenfällt.

6. Hiernach lassen sich die gefundenen Resultate auch in folgender Weise aussprechen.

Die Spitze des Kegels ist in Bezug auf denselben konjugierter Pol zu allen Punkten des Raumes; dagegen hat jeder andere Punkt eine bestimmte Polarebene. Alle Polarebenen gehen durch die Spitze des Kegels; alle Punkte einer jeden durch die Spitze gehenden Geraden haben dieselbe Polarebene.

Im Gegensatze zu den eigentlichen Flächen sind bei den Kegelflächen nur die durch einen festen Punkt, den Scheitel, gehenden Ebenen Polarebenen; aber alsdann besitzen sie nicht einen einzigen, sondern unendlich viele Pole, die in einer Geraden liegen.

Wir ordnen daher am besten die durch den Scheitel gehenden Geraden einander polar zu. Zwei Gerade heifsen konjugierte Polare in Bezug auf den Kegel, wenn ihre Verbindungsebene zwei Geraden aus dem Kegel ausschneidet, die zu ihnen harmonisch liegen. Dann sind auch zwei beliebige Punkte, von denen je einer auf einer der beiden Polaren liegt, konjugierte Pole in Bezug auf den Kegel. Alle konjugierten Polare zu einer durch den Scheitel gehenden Geraden liegen in einer Ebene, welche ebenfalls den Scheitel enthält. Die Polarebene zu einer Erzeugenden der Fläche geht in die Tangentialebene über und berührt längs der Erzeugenden.

7. Da die Eigenschaft der Fläche, einen singulären Punkt zu besitzen (d. h. einen Punkt, der zu allen Punkten des Raumes konjugierter Pol ist), rein geometrischer Natur ist, so mufs sie auch bei einer Umänderung des Koordinatensystems ungeändert bleiben. Wir wählen ein neues Koordinaten-Tetraeder so, dafs

der Punkt $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ der singuläre Punkt ist. In den neuen Koordinaten wird die Gleichung wiederum vom zweiten Grade sein; sie wird etwa die Form haben:

$$\Sigma b_{ix}\, y_i\, y_x = 0.$$

Demnach müssen die Gleichungen (1) erfüllt sein, wenn man die Koefficienten a_{ix} durch b_{ix} und das Wertsystem $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ durch $(0, 0, 0, 1)$ ersetzt; somit ist $b_{14} = b_{24} = b_{34} = b_{44} = 0$. In der neuen Gleichung kommt die Variabele y_4 nicht vor; die Gleichung des Kegels enthält nur die Variabeln y_1, y_2, y_3.

8. Zu diesem Resultate waren wir auch schon in § 10 gelangt, indem wir den Scheitel des Kegels mit dem Punkte $(0, 0, 0, 1)$ zusammenfallen liefsen und die Leitlinie in der Ebene $x_4 = 0$ annahmen. Wir fanden dort eine zweite Form, nämlich einen homogen quadratischen Ausdruck aus drei linearen Ausdrücken

$$\begin{aligned} &c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + c_{14}x_4,\\ &c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + c_{24}x_4,\\ &c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 + c_{34}x_4. \end{aligned}$$

Diese Form kommt auf die vorhin gefundene hinaus, da man ja diese drei linearen Ausdrücke als neue Koordinaten y_1, y_2, y_3 voraussetzen und die y_4 als beliebige lineare Funktion von $x_1 \ldots x_4$ nehmen darf.

Ebenfalls haben wir bereits früher den Kegel zweiter Ordnung durch drei Quadrate dargestellt. Auch diese Form der Gleichung ergiebt sich unmittelbar aus den zuletzt gefundenen Resultaten. Wir brauchen demnach nicht nochmals darauf einzugehen, können uns vielmehr damit begnügen, folgenden Satz auszusprechen:

Wenn die aus den Koefficienten einer homogenen Gleichung zweiten Grades zwischen vier Variabeln gebildete Determinante verschwindet, so kann man die Gleichung vermittelst einer linearen Transformation als Summe von drei Quadraten darstellen.

Übungen:

1) a) Man wähle in der Gleichung

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{24}x_2x_4\\ + 2a_{34}x_3x_4 + a_{44}x_4^2 = 0, \end{aligned}$$

in welcher die sechs ersten Koefficienten gegeben sind, den Koefficienten a_{44} so, dafs die Gleichung einen Kegel darstellt.

b) Speciell setze man die Gleichung in der Form

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_4 + 4x_2x_4 + 6x_3x_4 + a_{44}x_4^2 = 0$$

oder in der Form

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_4 + 6x_2x_4 + a_{44}x_4^2 = 0$$

voraus.

c) Man bestimme jedesmal den Scheitel des Kegels.

d) Man stelle in den drei angegebenen Fällen die Fläche durch drei Quadrate dar.

2) a) Wenn die Determinante A verschwindet, aber die Unterdeterminante A_{44} (der Koefficient von a_{44} in A) von null verschieden ist, so kann man die Gleichung (1) auf die Form bringen:

$$a_{11}(x_1 + \lambda x_4)^2 + a_{22}(x_2 + \mu x_4)^2 + a_{33}(x_3 + \nu x_4)^2 + 2a_{12}(x_1 + \lambda x_4)(x_2 + \mu x_4) + 2a_{13}(x_1 + \lambda x_4)(x_3 + \nu x_4) + 2a_{23}(x_2 + \mu x_4)(x_3 + \nu x_4) = 0.$$

(Weil die Unterdeterminante A_{44} nicht verschwindet, kann man drei Gröfsen λ, μ, ν durch die Gleichungen bestimmen:

$$\lambda a_{11} + \mu a_{12} + \nu a_{13} = a_{14}$$
$$\lambda a_{21} + \mu a_{22} + \nu a_{23} = a_{24}$$
$$\lambda a_{31} + \mu a_{32} + \nu a_{33} = a_{34}.$$

Jetzt multipliziere man die Elemente der ersten Kolonne in A mit λ, die der zweiten mit μ, der dritten mit ν und subtrahiere die Summe der Produkte von der vierten Kolonne. Dann erkennt man leicht, dafs infolge der gemachten Voraussetzungen ist

$$\lambda a_{41} + \mu a_{42} + \nu a_{43} = a_{44}.$$

Da aber $a_{14} = a_{41}$ u. s. w. ist, so ergiebt sich

$$a_{44} = \lambda^2 a_{11} + 2\lambda\mu a_{12} + 2\lambda\nu a_{13} + \mu^2 a_{22} + 2\mu\nu a_{23} + \nu^2 a_{33}.$$

Durch Einsetzung der für a_{14}, a_{24}, a_{34}, a_{44} gefundenen Werte ergiebt sich die angegebene Form.)

b) Man führe die in a) angegebenen Operationen für die in der Übung 1) mitgeteilten Kegel aus.

c) Der Punkt $(\lambda, \mu, \nu, -1)$ ist die Spitze des Kegels.

(Die für λ, μ, ν gefundenen Gleichungen werden für $\xi_1 = \lambda$, $\xi_2 = \mu$, $\xi_3 = \nu$, $\xi_4 = -1$ mit den Gleichungen (1) identisch.)

3) a) Die homogene quadratische Form $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ in den Variabeln x_1, x_2, x_3, x_4 läfst sich durch lineare Substitution auf eine Form von drei Variabeln zurückführen, falls die vier Gleichungen: $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = 0$, $f(x_3) = 0$, $f(x_4) = 0$ eine gemeinschaftliche Lösung haben.

b) Die angegebene Bedingung läfst sich auch in der Weise aussprechen: Es mufs möglich sein, vier konstante Gröfsen $\varrho_1 \ldots \varrho_4$ so zu bestimmen, dafs die Gleichung:

$$\varrho_1 f'(x_1) + \varrho_2 f'(x_2) + \varrho_3 f'(x_3) + \varrho_4 f'(x_4) = 0$$

für alle Werte der Variabeln befriedigt wird.

c) Wenn die Gleichung $(f(x_1 \ldots x_4) = 0$ einen Kegel zweiter Ordnung darstellt, so genügen die Koordinaten $(\xi_1 \ldots \xi_4)$ seines Scheitels den vier Gleichungen:

$$f'(\xi_1) = 0,\ f'(\xi_2) = 0,\ f'(\xi_3) = 0,\ f'(\xi_4) = 0.$$

4) Wenn die Gleichung einer eigentlichen Fläche zweiter Ordnung in der Form $f(x_1 \ldots x_4) = 0$ gegeben ist, so hat der vom Punkte (x') ausgehende Tangentialkegel die Gleichung:

$$4f(x)f(x') - [x_1 f'(x_1') + x_2 f'(x_2') + x_3 f'(x_3') + x_4 f'(x_4')]^2 = 0.$$

Der Beweis gründet sich auf folgende Erwägungen.

a) Setzt man die linke Seite der aufgestellten Gleichung gleich $\varphi(x_1 \ldots x_4)$ und bildet die partiellen Ableitungen $\varphi'(x_1) \ldots \varphi'(x_4)$, so ist:

$$\varphi'(x_1) = 4f'(x_1)f(x') - 2f'(x_1')[x_1 f'(x_1') + \ldots + x_4 f'(x_1')]$$

. . . . . .

$$\varphi'(x_4) = 4f'(x_4)f(x') - 2f'(x_4')[x_1 f'(x_1') + \ldots + x_4 f'(x_4')].$$

b) Weil jetzt ist $\varphi'(x_1') = \varphi'(x_2') = \varphi'(x_3') = \varphi'(x_4') = 0$, stellt die Gleichung $\varphi(x_1 \ldots x_4) = 0$ einen Kegel dar, dessen Spitze im Punkte $(x_1' \ldots x_4')$ liegt.

c) Die Fläche $\varphi(x) = 0$ hat mit der Fläche $f(x) = 0$ nur diejenige ebene Kurve gemeinschaftlich, welche in der Polarebene des Punktes (x') in Bezug auf die Fläche $f(x) = 0$ liegt.

5) a) Den vom Punkte (x') an die Fläche zweiter Ordnung $f(x_1 \ldots x_4) = 0$ gelegten Tangentialkegel kann man auch durch die Gleichung darstellen:

$$[x_1 f'(x_1) + \ldots + x_4 f'(x_4)]\ [x_1' f'(x_1') + \ldots + x_4' f'(x_4')] = [x_1 f'(x_1') + \ldots + x_4 f'(x_4')]^2.$$

b) Kann man auch auf der rechten Seite dieser Gleichung die Gröfsen $x_1 \ldots x_4$ und $x_1' \ldots x_4'$ vertauschen?

6) Bezeichnet man die Unterdeterminante, mit der das Element $a_{i\varkappa}$ in der Determinante A multipliziert wird, mit $A_{i\varkappa}$, so haben bei verschwindender Determinante A die vier Gleichungen:

$$(\alpha)\quad \begin{array}{l} a_{11}\eta_1 + a_{12}\eta_2 + a_{13}\eta_3 + a_{14}\eta_4 = 0 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ a_{41}\eta_1 + a_{42}\eta_2 + a_{43}\eta_3 + a_{44}\eta_4 = 0 \end{array}$$

die Lösungen:

$$(\beta)\quad \begin{array}{rl} \eta_1 : \eta_2 : \eta_3 : \eta_4 & = A_{11} : A_{12} : A_{13} : A_{14} \\ & = A_{21} : A_{22} : A_{23} : A_{24} \\ & = A_{31} : A_{32} : A_{33} : A_{34} \\ & = A_{41} : A_{42} : A_{43} : A_{44}. \end{array}$$

(Für jeden Wert von A gelten die Beziehungen:

$$(\gamma)\quad a_{i1} A_{k1} + a_{i2} A_{k2} + a_{i3} A_{k3} + a_{i4} A_{k4} = 0,$$

falls die Marken i und k verschieden sind. Wenn aber $i = k$ ist, so ist die linke Seite der letzten Gleichung gleich A; also ist die Gleichung (γ) in unserm Falle allgemein gültig.)

b) Falls sich unter den Unterdeterminanten $A_{\iota\varkappa}$ mindestens eine nicht verschwindende befindet, so werden die Gleichungen (a) nur durch ein einziges Verhältnis der Gröfsen $\eta_1 : \ldots : \eta_4$ befriedigt; ist ($\xi_1 \ldots \xi_4$) die Spitze des durch die Gleichung (2) dargestellten Kegels, so ist

$$\eta_1 : \eta_2 : \eta_3 : \eta_4 = \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4.$$

c) Zwischen den Unterdeterminanten $A_{\iota\varkappa}$ und den Koordinaten ($\xi_1 \ldots \xi_4$) der Spitze des Kegels finden die Beziehungen statt:

$$A_{11} = \varrho\xi_1^2,\ A_{12} = \varrho\xi_1\xi_2,\ A_{13} = \varrho\xi_1\xi_3,\ A_{14} = \varrho\xi_1\xi_4,$$
$$A_{22} = \varrho\xi_2^2,\ A_{23} = \varrho\xi_2\xi_3,\ A_{24} = \varrho\xi_2\xi_4,\ A_{33} = \varrho\xi_3^2,$$
$$A_{34} = \varrho\xi_3\xi_4,\ A_{44} = \varrho\xi_4^2.$$

(Setzt man $A_{11} = \varrho\xi_1^2$, so folgen die angegebenen Werte für A_{12}, A_{13}, A_{14} aus (β). Da aber allgemein $A_{\iota\varkappa} = A_{\varkappa\iota}$ ist, so sind jetzt auch die Werte für A_{21}, A_{31}, A_{41} bekannt; wir erhalten daher auch die Werte für A_{22}, A_{23} u. s. w. aus den Gleichungen (β).)

d) Demnach ist unter der gemachten Voraussetzung:

$$\Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota u_\varkappa = \varrho\,(\xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \xi_3 u_3 + \xi_4 u_4)^2.$$

7) a) Um den Kegel $\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa = 0$ in Ebenenkoordinaten darzustellen, mufs man zuerst die Koordinaten $\xi_1 \ldots \xi_4$ seines Scheitels suchen. Alsdann bestimme man die Gleichung der Schnittlinie des Kegels mit einer beliebigen Ebene, welche den Scheitel nicht enthält. Diese Schnittlinie stelle man in Ebenen-

koordinaten dar; die Verbindung dieser Gleichung mit der Gleichung des Scheitels

$$\xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \xi_3 u_3 + \xi_4 u_4 = 0$$

stellt den Kegel dar.

b) Man wende diese Vorschrift auf die in Üb. 1) angegebenen Kegel an.

(Die Ebene $x_4 = 0$ geht nicht durch den Scheitel; daher kann man die Schnittlinie des Kegels mit dieser Ebene benutzen.)

c) Welches ist in Punktkoordinaten die Gleichung desjenigen Kegels, welcher in Ebenenkoordinaten durch die Gleichungen bestimmt wird:

$$u_1 - 3u_2 + u_4 = 0,\ u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 = 0?$$

d) Der Kegel

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = 0$$

wird in Ebenenkoordinaten durch die Gleichungen dargestellt:

$$u_4 = 0,\ \frac{u_1^2}{a_1} + \frac{u_2^2}{a_2} + \frac{u_3^2}{a_3} = 0.$$

(Der Scheitel hat die Koordinaten 0, 0, 0, 1; zudem stellt die gegebene Gleichung auch die Schnittlinie mit der Ebene $x_4 = 0$ dar.)

e) Der in d) angegebene Kegel genügt bei beliebigen Werten von α_1, α_2, α_3, α_4 auch den Gleichungen:

$$u_4 = 0,\ \frac{u_1^2}{a_1} + \frac{u_2^2}{a_2} + \frac{u_3^2}{a_3}$$
$$+ u_4 (2\alpha_1 u_1 + 2\alpha_2 u_2 + 2\alpha_3 u_3 + 2\alpha_4 u_4) = 0.$$

8) Der Kegel, dessen Scheitel unter Anwendung von Cartesischen Koordinaten im Punkte (x', y', z') liegt und dessen Leitlinie der Kegelschnitt ist:

$$z = 0,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

hat die Gleichung:

$$\left(\frac{z'x - zx'}{a}\right)^2 + \left(\frac{z'y - zy'}{b}\right)^2 = (z - z')^2.$$

(Man ersetze die Koordinaten x, y, z durch die Quotienten $x_1 : x_4$, $x_2 : x_4$, $x_3 : x_4$, mache dadurch die Gleichung homogen und wende die angegebenen Kennzeichen an.)

§ 16.

Das Ebenenpaar.

1. Wenn die Koefficienten a_{ix} in der Gleichung

$$(1)\quad \Sigma a_{ix} x_i x_x = 0$$

solche Werte haben, dafs alle Unterdeterminanten dritten Grades der Determinante

$$(2)\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

verschwinden, ohne dafs die Unterdeterminanten zweiten Grades ebenfalls gleich null sind, so sind nur zwei von den vier Gleichungen:

$$(3)\quad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= 0 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= 0 \end{aligned}$$

von einander unabhängig. Diese vier Gleichungen kommen auf zwei hinaus; man genügt den vier Gleichungen (3) durch die Koordinaten aller Punkte einer geraden Linie.

Sind $(\xi_1 \ldots \xi_4)$ die Koordinaten eines Punktes dieser Geraden und $(x_1 \ldots x_4)$ die eines beliebigen Punktes des Raumes, so besteht die Gleichung:

$$(4)\quad \Sigma a_{ix} x_i \xi_x = 0.$$

Da demnach jeder Punkt dieser Geraden konjugierter Pol zu allen Punkten des Raumes ist, so nennen wir diese Linie die singuläre Linie der Fläche.

2. Auf dem in § 15, 4 angegebenen Wege zeigen wir, dafs eine durch die singuläre Gerade gelegte Ebene entweder nur diese Gerade mit der Fläche gemeinschaftlich hat oder ihr ganz angehört. Wir wollen diesen Satz direkt erweisen.

Es seien (ξ) und (η) zwei Punkte der singulären Linie und (x') ein Punkt, der dieser Geraden nicht angehört. Alle Punkte der Ebene, welche durch diese drei Punkte gelegt werden kann, haben Koordinaten, die sich verhalten wie

$$x_1' + \lambda\xi_1 + \mu\eta_1,\ x_2' + \lambda\xi_2 + \mu\eta_2,\ x_3' + \lambda\xi_3 + \mu\eta_3,\ x_4' + \lambda\xi_4 + \mu\eta_4.$$

Die Punkte, welche diese Ebene mit der Fläche (1) gemeinschaftlich hat, ergeben sich aus der Gleichung:

$$\Sigma a_{ix} (\lambda\xi_i + \mu\eta_i + \nu x_i') (\lambda\xi_x + \mu\eta_x + \nu x_x') = 0.$$

Da aber die Gleichung (4) auch besteht, wenn man $(\xi_1 \ldots \xi_4)$ durch $(\eta_1 \ldots \eta_4)$ ersetzt, so geht die letzte Gleichung über in

$$\nu^2 \Sigma a_{ix} x_i' x_x' = 0.$$

Diese Gleichung wird, wenn der Punkt (x') nicht auf der Fläche liegt, nur für $\nu = 0$, also für die Punkte der singulären Geraden befriedigt. Wenn dagegen der Punkt (x') auf der Fläche liegt, so genügt man der Gleichung für alle Werte von λ, μ, ν, oder die Ebene gehört der Fläche ganz an.

3. Wir nehmen jetzt eine beliebige Gerade g hinzu, welche nicht durch die singuläre Linie hindurchgeht. Da diese zwei (reelle oder imaginäre) Punkte mit der Fläche (1) gemeinschaftlich hat, finden wir durch Verbindung eines jeden dieser beiden Punkte mit den Punkten der singulären Geraden zwei Ebenen, welche ganz der Fläche angehören. Dadurch haben wir aber alle Punkte der Fläche erhalten. Denn gäbe es noch einen weiteren Punkt der Fläche, so würde man durch Verbindung desselben mit den Punkten der singulären Linie noch eine dritte Ebene erhalten. Diese müfste aber mit der Geraden g noch einen dritten Punkt gemeinschaftlich haben, was nicht möglich ist. Somit stellt die Gleichung (1) ein Ebenenpaar dar, wenn die ersten Unterdeterminanten der Determinante (2) sämtlich verschwinden, unter den zweiten Unterdeterminanten aber sich mindestens eine von null verschiedene befindet.

4. Die Polarebene eines Punktes (x'), welcher nicht in der singulären Linie liegt, hat die Gleichung:

$$(5) \quad \Sigma a_{ix} x_i x_x' = 0.$$

Diese Gleichung wird befriedigt, wenn man $(x_1 \ldots x_4)$ durch die Koordinaten irgend eines Punktes der singulären Geraden ersetzt. Daher geht die Polarebene eines jeden Punktes durch die singuläre Linie hindurch.

Wählt man statt des Punktes (x') einen Punkt derjenigen Ebene, welche durch ihn und die singuläre Gerade gelegt werden kann, so hat man die Koordinaten x_α' durch

$$x_\alpha' + \lambda\xi_\alpha + \mu\eta_\alpha$$

zu ersetzen, wofern wieder (ξ) und (η) zwei Punkte der singulären Geraden sind. Jetzt wird die Gleichung der Polarebene:

$$\Sigma a_{ik} x_i (x_k' + \lambda \xi_k + \mu \eta_k) = 0.$$

Diese geht aber über in $\Sigma a_{ik} x_i x_k' = 0$, ist also mit der Gleichung (5) identisch. Bei unserer Voraussetzung gelten also folgende Sätze:

Jeder Punkt, der nicht in der singulären Geraden liegt, hat eine bestimmte Polarebene; alle Polarebenen gehen durch die singuläre Linie. Alle Punkte einer durch die singuläre Linie gelegten Ebene haben dieselbe Polarebene.

5. Da die Punkte einer durch die singuläre Linie gehenden Ebene I dieselbe Polarebene I' haben und hinwiederum die Ebene I Polarebene zu allen Punkten der Ebene I' ist, so dürfen wir die Ebenen I und I' als konjugierte Polarebenen bezeichnen.

Das Ebenenpaar vermittelt somit eine involutorische Zuordnung der durch seine Kante gehenden Ebenen. Irgend zwei einander zugeordnete Ebenen liegen harmonisch zu den Ebenen des Paares.

6. Um die Gleichung des Ebenenpaares auf die einfachste Form zu bringen, wählen wir zwei konjugierte Polarebenen zu den zwei Seiten des Koordinaten-Tetraeders $y_1 = 0$ und $y_2 = 0$ und nehmen die beiden andern Seiten $y_3 = 0$ und $y_4 = 0$ beliebig hinzu. In diesen Koordinaten möge die Fläche durch die Gleichung dargestellt werden:

$$\Sigma b_{ik} y_i y_k = 0.$$

Da die Gerade $y_1 = y_2 = 0$ die singuläre Linie ist, so müssen die vier Gleichungen:

$$b_{11} y_1 + b_{12} y_2 + b_{13} y_3 + b_{14} y_4 = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$b_{41} y_1 + b_{42} y_2 + b_{43} y_3 + b_{44} y_4 = 0$$

für $y_1 = y_2 = 0$ erfüllt sein. Daher sind die Koefficienten b_{13}, b_{14}, b_{23}, b_{24}, b_{33}, b_{34}, b_{44} gleich null. Da noch die Ebenen $y_1 = 0$ und $y_2 = 0$ Polarebenen von einander sind, so muſs auch $b_{12} = 0$ sein; die Gleichung der Fläche ist also:

$$(6) \quad b_{11} y_1^2 + b_{22} y_2^2 = 0.$$

Eine homogene quadratische Gleichung in vier Variabeln, für welche alle Unterdeterminanten dritten Grades der aus den

Koefficienten gebildeten Determinante verschwinden, läfst sich durch eine lineare Transformation auf die Form zweier Quadrate bringen.

Übungen:

1) a) Wenn die Unterdeterminante $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ von null verschieden ist, aber die Unterdeterminanten A_{33}, A_{34}, A_{44} gleich null sind, so kann man vier Koefficienten $\varkappa$, λ, μ, ν so bestimmen, dafs ist:

$$a_{13} = \varkappa a_{11} + \lambda a_{12},\ a_{23} = \varkappa a_{21} + \lambda a_{22},\ a_{14} = \mu a_{11} + \nu a_{12},$$
$$a_{24} = \mu a_{21} + \nu a_{22},\ a_{33} = \varkappa^2 a_{11} + 2\varkappa\lambda a_{12} + \lambda^2 a_{22},$$
$$a_{34} = \varkappa\mu a_{11} + (\varkappa\nu + \lambda\mu)\, a_{12} + \lambda\nu a_{22},$$
$$a_{44} = \mu^2 a_{11} + 2\mu\nu a_{12} + \nu^2 a_{22}.$$

(Die Möglichkeit, die vier ersten Gleichungen zu befriedigen, ergiebt sich daraus, dafs $a_{11}a_{22} - a_{21}^2$ von null verschieden ist; alsdann müssen die drei folgenden Gleichungen bestehen wegen des Verschwindens der angegebenen Unterdeterminanten.)

b) Demnach nimmt unter den gemachten Voraussetzungen die Gleichung (1) die Gestalt an:

$$a_{11}y_1^2 + 2a_{12}y_1y_2 + a_{22}y_2^2 \text{ für } y_1 = x_1 + \varkappa x_3 + \mu x_4,$$
$$y_2 = x_2 + \lambda x_3 + \nu x_4.$$

c) Man stelle die in b) angegebene Form als Produkt von zwei linearen Faktoren dar.

d) Man zeige, dafs unter der gemachten Annahme alle dreireihigen Unterdeterminanten von A verschwinden.

2) Man führe die gleiche Untersuchung für den Fall durch, dafs die Unterdeterminante $a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}$ von null verschieden ist, aber die Unterdeterminanten A_{44}, A_{34} und A_{14} verschwinden.

3) a) Man weise im Anschlufs an diese beiden Übungen nach, dafs in einer symmetrischen Determinante vierten Grades alle dreireihigen Unterdeterminanten verschwinden, sobald alle diejenigen Unterdeterminanten dritten Grades null sind, welche eine nicht-verschwindende zweireihige Unterdeterminante in sich enthalten.

b) Wieviel Bedingungen müssen zwischen den Koefficienten in der Gleichung einer Fläche zweiten Grades bestehen, damit dieselbe in ein Ebenenpaar übergeht?

c) Wieviel Bedingungen müssen erfüllt sein, damit alle drei-

reihigen Unterdeterminanten einer beliebigen Determinante vierten Grades verschwinden?

4) Die Gleichung (1) wandle man durch lineare Transformation in die Form $\Sigma b_{ix}\, y_i\, y_x = 0$ um und zeige direkt, daſs auch die vier Ebenen $\Sigma b_{1x}\, y_x = 0$, $\Sigma b_{2x}\, y_x = 0$, $\Sigma b_{3x}\, y_x = 0$, $\Sigma b_{4x}\, y_x = 0$ einem Ebenenbüschel angehören.

§ 17.

Die Doppelebene.

1. Wenn in der Gleichung

$$(1) \qquad \Sigma a_{ix}\, x_i\, x_x = 0$$

einer Fläche zweiter Ordnung die Koefficienten in einer solchen Beziehung zu einander stehen, daſs die sämtlichen Unterdeterminanten zweiten Grades der Determinante

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

verschwinden, so kommen die Gleichungen:

$$(3) \qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= 0 \end{aligned}$$

auf eine einzige hinaus. Alle Punkte derjenigen Ebene, auf welche wir durch diese Gleichungen geführt werden, sind singuläre Punkte in dem Sinne, daſs zu ihnen jeder Punkt des Raumes konjugierter Pol ist. Alle andern Punkte haben diese Ebene zur Polarebene. Denn ist (x') ein Punkt, dessen Koordinaten den Gleichungen (3) nicht genügen, so ist die Gleichung der Polarebene

$$\Sigma a_{ix}\, x_i'\, x_x = 0$$

oder

$$x_1' \Sigma a_{1x}\, x_x + x_2' \Sigma a_{2x}\, x_x + x_3' \Sigma a_{3x} x_x + x_4' \Sigma a_{4x}\, x_x = 0.$$

Da in dieser Gleichung sich die Koefficienten von x_1', x_2', x_3', x_4' nur um konstante Faktoren unterscheiden, so stellt sie für alle verschiedenen Wertsysteme $(x_1' \ldots x_4')$ dieselbe Ebene dar, wie die Gleichungen (3). Alle Punkte des Raumes haben dieselbe Polarebene; zu jedem Punkte dieser Ebene ist aber jeder Punkt des Raumes konjugierter Pol.

2. Wie wir früher (§ 13, 3. 4) gesehen haben, gehören der Fläche (2) nur diejenigen Punkte an, welche in ihrer Polarebene liegen. Demnach kann in unserm Falle der Fläche kein Punkt angehören, der aufserhalb der singulären Ebene liegt, da ein solcher Punkt die singuläre Ebene zur Polarebene hat. Dagegen ist ein beliebiger Punkt der singulären Ebene zu allen Punkten des Raumes, also auch zu sich konjugierter Pol. Demnach gehören der Fläche alle Punkte der singulären Ebene, und nur diese, an. Schon hieraus geht hervor, dafs bei unsern Voraussetzungen ist:

$$(4) \quad \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa = \varrho (c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4)^2.$$

3. Um dies Resultat nochmals zu erweisen, wähle man die Ebene $y_1 = 0$ zur singulären Ebene und nehme drei andere Koordinatenebenen beliebig hinzu. Wenn jetzt die Gleichung der Fläche wird $\Sigma b_{\iota\varkappa} y_\iota y_\varkappa = 0$, so müssen die vier Gleichungen

$$b_{11} y_1 + b_{12} y_2 + b_{13} y_3 + b_{14} y_4 = 0$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$b_{41} y_1 + b_{42} y_2 + b_{43} y_3 + b_{44} y_4 = 0$$

für $y_1 = 0$ und beliebige Werte von y_2, y_3, y_4 befriedigt werden. Demnach mufs sein:

$b_{12} = b_{13} = b_{14} = b_{22} = b_{23} = b_{24} = b_{33} = b_{34} = b_{44} = 0$;

die Gleichung der Fläche ist also

$$b_{11} y_1^2 = 0.$$

Übungen:

1) a) Damit die durch die drei Punkte (ξ), (η), (ζ) gelegte Ebene ganz der Fläche zweiter Ordnung $f(x_1 \ldots x_4) = 0$ angehört, müssen die sechs Gleichungen erfüllt sein:

$$f(\xi_1 \ldots \xi_4) = 0, \; f(\eta_1 \ldots \eta_4) = 0, \; f(\zeta_1 \ldots \zeta_4) = 0,$$
$$\Sigma \xi_\varkappa f'(\eta_\varkappa) = 0, \; \Sigma \xi_\varkappa f'(\zeta_\varkappa) = 0, \; \Sigma \eta_\varkappa f'(\zeta_\varkappa) = 0.$$

(Setzt man $x_\alpha = \lambda \xi_\alpha + \mu \eta_\alpha + \nu \xi_\alpha$, so wird die Gleichung $f(x_1 \ldots x_4) = 0$ für beliebige Werte von λ, μ, ν befriedigt.)

b) Sobald die drei Seiten eines Dreiecks auf einer Fläche zweiter Ordnung liegen, gehört ihr die Ebene des Dreiecks vollständig an.

c) Sobald die drei Eckpunkte eines Dreiecks und noch ein Punkt von jeder der drei Seiten in einer Fläche zweiter Ordnung liegen, gehört ihr die Ebene des Dreiecks vollständig an.

d) Wenn eine Ebene einer Fläche zweiter Ordnung angehört,

kann jeder Punkt der Ebene als ihr Pol in Bezug auf die Fläche betrachtet werden.

(Aus den in Übung 1) angegebenen Gleichungen folgt, daſs irgend zwei Punkte $(\lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta)$ und $(\lambda'\xi + \mu'\eta + \nu'\zeta)$ konjugierte Pole von einander sind.)

2) Man gebe verschiedene Beweise des Satzes, daſs eine Fläche zweiter Ordnung in ein Ebenenpaar oder in eine Doppelebene übergeht, sobald ihr alle Punkte dieser Ebene angehören.

a) Die Ebene E und drei Punkte 1, 2, 3, die nicht in gerader Linie liegen, mögen der Fläche angehören. Man lege durch die Punkte 1, 2, 3 eine zweite Ebene. Dann liegen in der Fläche zweiter Ordnung die Eckpunkte des Dreiecks (1, 2, 3) und der Schnittpunkt einer jeden seiner Seiten mit der Ebene E. Man kann daher Übung 1) c) anwenden.

b) Man beachte die verschiedenen Fälle, welche betreffs der Determinante möglich sind. Wenn diese nicht verschwindet, so hat jede Ebene einen einzigen Pol; wenn sie null ist, ohne daſs alle ihre dreireihigen Unterdeterminanten verschwinden, so liegen alle Pole einer Ebene auf einer geraden Linie. Nach Übung 1) d) ist aber jeder Punkt der gegebenen Ebene ihr Pol.

c) Soll die Ebene $x_1 = 0$ der Fläche (1) angehören, so muſs die Gleichung (1) für $x_1 = 0$ und beliebige Werte von x_2, x_3, x_4 befriedigt werden; also müssen die sechs Koefficienten a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{33}, a_{34}, a_{44} null sein.

(Man suche die Bedingungen dafür, daſs zunächst die Eckpunkte O_2, O_3, O_4 des Koordinatendreiecks und dann noch ein Punkt auf je einer Seite desselben der Fläche angehört.)

3) a) Wenn der Koefficient a_{11} von null verschieden ist, aber die Determinanten

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2,\ a_{11}a_{33} - a_{13}^2,\ a_{11}a_{44} - a_{14}^2,\ a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13},$$
$$a_{11}a_{24} - a_{14}a_{12},\ a_{11}a_{34} - a_{13}a_{14}$$

verschwinden, so lassen sich drei Koefficienten λ, μ, ν so bestimmen, daſs die Gleichungen bestehen:

$$a_{12} = \lambda a_{11},\ a_{13} = \mu a_{11},\ a_{14} = \nu a_{11},\ a_{22} = \lambda^2 a_{11},$$
$$a_{23} = \lambda\mu a_{11},\ a_{24} = \lambda\nu a_{11},\ a_{33} = \mu^2 a_{11},$$
$$a_{34} = \mu\nu a_{11},\ a_{44} = \nu^2 a_{11}.$$

(Die drei ersten Gleichungen sind eine Folge davon, daſs

$a_{11} \neq 0$ ist; die sechs folgenden ergeben sich aus dem Verschwinden der angegebenen Determinanten.)

b) Die gegebene Gleichung (1) nimmt unter diesen Voraussetzungen die Form an:

$$a_{11}(x_1 + \lambda x_2 + \mu x_3 + \nu x_4)^2 = 0.$$

c) Unter den gemachten Annahmen verschwinden alle Unterdeterminanten zweiten Grades von A.

d) Damit die Gleichung (1) eine Doppelebene darstellt, müssen zwischen ihren Koefficienten sechs Bedingungsgleichungen bestehen.

4) Sobald in einer vierreihigen Determinante diejenigen neun zweireihigen Determinanten null sind, in denen ein bestimmtes, von null verschiedenes Element vorkommt, verschwinden alle ihre zweireihigen und damit zugleich alle ihre dreireihigen Unterdeterminanten, sowie die Determinante selbst.

(Wenn $a_{11} \neq 0$ ist, aber alle neun zweireihigen Unterdeterminanten verschwinden, in denen a_{11} vorkommt, so kann man setzen: $a_{12} = \lambda a_{11}$, $a_{13} = \mu a_{11}$, $a_{14} = \nu a_{11}$, $a_{21} = \lambda' a_{11}$, $a_{31} = \mu' a_{11}$, $a_{41} = \nu' a_{11}$. Wegen des Verschwindens der ausgewählten Unterdeterminanten kann man die übrigen neun Elemente der Determinante durch a_{11} und die sechs Koefficienten λ, μ, ν, λ', μ', ν' ausdrücken.)

§ 18.

Einteilung der Flächen zweiter Ordnung nach projektiven Eigenschaften.

1. Die Determinante

$$(1) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{14} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{41} & \cdots & a_{44} \end{vmatrix}$$

bietet das einfachste und natürlichste Einteilungsprincip für die Flächen, welche durch die Gleichung

$$(1) \quad \Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$$

dargestellt werden. Wenn diese Determinante von null verschieden ist, so nennen wir die dargestellte Fläche eine eigentliche Fläche zweiter Ordnung. Die Gleichung kann in diesem Falle auf die Form von vier Quadraten gebracht werden.

Jeder Punkt hat eine Polarebene, jede Ebene einen Pol. Die Fläche ist auch von der zweiten Klasse.

2. Wenn die Determinante (1) verschwindet, ohne daſs ihre sämtlichen Unterdeterminanten dritten Grades null sind, so stellt die Gleichung einen Kegel dar. Die Spitze des Kegels ist ein singulärer Punkt in dem Sinne, daſs zu ihr jeder Punkt des Raumes konjugierter Pol ist. Die Polarebenen aller übrigen Punkte gehen durch die Spitze des Kegels; alle Punkte, die mit der Spitze in gerader Linie liegen, haben dieselbe Polarebene. Dem Kegel gehört eine Schar von Geraden an, die durch die Spitze gehen; alle Tangentialebenen berühren längs einer solchen Geraden. Die Gleichung des Kegels läſst sich in drei Quadrate umwandeln.

3. Wenn in der Determinante (1) alle Unterdeterminanten dritten Grades null sind, ohne daſs die Unterdeterminanten zweiten Grades sämtlich verschwinden, so stellt die Gleichung (2) ein Ebenenpaar dar. Zu den Punkten der Schnittlinie ist jeder Punkt des Raumes konjugierter Pol; die Polarebenen aller andern Punkte gehen durch diese Gerade hindurch; alle Punkte, die mit der Schnittlinie in einer Ebene liegen, haben dieselbe Polarebene. Man kann die Gleichung auf zwei Quadrate zurückführen.

4. Wenn endlich die sämtlichen Unterdeterminanten zweiten Grades verschwinden, so ist die linke Seite der Gleichung (2) ein vollständiges Quadrat; die Fläche ist eine Doppelebene. Diese Ebene ist Polarebene zu allen Punkten des Raumes, die nicht in ihr liegen.

5. Für die weitere Einteilung legen wir die Darstellung durch Quadrate zu Grunde. Wir benutzen also für eine eigentliche Fläche ein Koordinaten-Tetraeder, das zu sich selbst in Bezug auf die Fläche konjugiert ist. Dabei dürfen wir aber den Einheitspunkt noch willkürlich wählen. Indem wir das thun, wird jede einzelne Koordinate noch mit einer beliebigen (reellen) Konstanten multipliziert. Demnach können wir auch die absoluten Beträge für die Koefficienten der einzelnen Quadrate beliebig ändern; nur bleiben die Vorzeichen ungeändert. Es ist also gestattet, jedem einzelnen Quadrate den Koefficienten $+1$ oder -1 zu geben. Da wir aber endlich die Gleichung noch mit -1 multiplizieren dürfen, kommt es nur auf den Wechsel der Vorzeichen an. Wir

erhalten daher für die eigentlichen Flächen nur folgende drei Möglichkeiten:

$$\text{I A)}\quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0.$$
$$\text{I B)}\quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0.$$
$$\text{I C)}\quad x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0.$$

6. Im Falle I A) fällt kein Punkt in seine Polarebene; die Fläche hat keinen reellen Punkt und keine reelle Tangentialebene. Wir nennen sie eine eigentliche imaginäre Fläche.

7. Im Falle I B) ist die Fläche reell, wie man unmittelbar erkennt. Von den Ebenen des Koordinaten-Tetraeders schneidet jede der drei ersten, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ in einem reellen eigentlichen Kegelschnitte, während die Ebene $x_4 = 0$ keinen Punkt mit der Fläche gemeinschaftlich hat. Die Gleichung kann man auch in der Form schreiben:

$$x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + x_4)(x_3 - x_4) = 0.$$

Die Ebene $x_3 = x_4$ hat mit der Fläche nur einen Punkt und ein von demselben ausgehendes imaginäres Geradenpaar gemein; sie ist eine Tangentialebene. Hieraus geht zunächst hervor, daſs die Fläche keine gerade Linie enthält; denn jede solche müſste die Ebene $x_4 = 0$ schneiden, und der Schnittpunkt müſste ein Punkt der Fläche sein, während doch diese Ebene ganz auſserhalb der Fläche liegt. Demnach hat auch jede Tangentialebene nur einen Punkt mit der Fläche gemein, da das in ihr gelegene Geradenpaar nicht reell sein kann. Die Ebenen haben mit der Fläche entweder einen eigentlichen reellen Kegelschnitt oder einen eigentlichen imaginären Kegelschnitt oder ein imaginäres Geradenpaar gemein.

8. Um weitere Eigenschaften der durch die Gleichung I B) dargestellten Fläche zu finden, legen wir durch den Punkt (0, 0, 0, 1) eine beliebige Gerade. Wenn diese noch durch den Punkt $(x_1' \ldots x_4')$ gehen soll, so sind ihre Koordinaten proportional den Gröſsen

$$x_1',\ x_2',\ x_3',\ x_4' + \varrho.$$

Die Schnittpunkte mit der Fläche ergeben sich aus der Gleichung:

$$(x_4' + \varrho)^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2.$$

Da der Punkt (x') vom Punkte (0, 0, 0, 1) verschieden sein soll und deshalb die rechte Seite der vorstehenden Gleichung

nicht verschwinden darf, so hat die Gleichung zwei ungleiche reelle Wurzeln. Also schneidet jede durch den Punkt (0, 0, 0, 1) gehende Gerade die Fläche in zwei reellen Punkten.

Dagegen ergeben sich die Punkte, in denen die Verbindungslinie des Punktes (1, 0, 0, 0) mit dem Punkte (x') die Fläche schneidet, aus der Gleichung:

$$(x_1' + \varrho)^2 = x_4'^2 - x_2'^2 - x_3'^2.$$

Hier kann je nach der Wahl des Punktes (x') die rechte Seite bald positive, bald negative, bald verschwindende Werte erhalten. Unter den vom Punkte (1, 0, 0, 0) ausgehenden geraden Linien giebt es sowohl schneidende als auch nichtschneidende und berührende Gerade.

Jetzt berücksichtigen wir noch, dafs durch jeden Punkt des Raumes schneidende Gerade gelegt werden können. Sobald also überhaupt von einem Punkte nichtschneidende Gerade ausgehen, können durch ihn auch Sekanten und Tangenten an die Fläche gelegt werden.

Hiernach zerfallen die Punkte des Raumes einer Fläche I B) gegenüber in zwei Klassen: durch die Punkte der ersten Klasse gehen nur schneidende Geraden hindurch, während durch die Punkte der andern Art auch nichtschneidende Gerade gelegt werden können. Die Punkte der ersten Klasse nennen wir Innenpunkte, die der zweiten Klasse Aufsenpunkte. Diese Punktmengen werden durch die Punkte der Fläche, von denen neben eigentlichen Sekanten auch Tangenten ausgehen, gegen einander abgegrenzt.

Aus der angegebenen Definition folgt unmittelbar, dafs jede durch den Innenpunkt gelegte Ebene die Fläche in einem reellen eigentlichen Kegelschnitte schneidet.

9. Man lege irgend ein anderes Polartetraeder der Koordinatenbestimmung zu Grunde. Die vier Quadrate, welche jetzt in der Gleichung der Fläche auftreten, können nicht alle dasselbe Vorzeichen haben, weil sonst die Fläche imaginär wäre; auch können nicht zwei Quadrate das positive, zwei das negative Vorzeichen haben, weil sonst die Fläche, wie wir später sehen werden, gerade Linien enthielte. Demnach weicht ein einziges Quadrat in seinem Vorzeichen von den drei andern ab. Daraus folgt der Satz:

Von den vier Eckpunkten eines Polartetraeders zu einer ungeradlinigen reellen Fläche zweiter Ordnung liegen drei im Äufsern und einer im Innern; von den vier Ebenen desselben schneiden drei in einem reellen, eine in einem imaginären Kegelschnitte.

Aus diesem Satze oder, wenn man lieber will, aus dem Umstande, dafs die Aufsen- und Innenpunkte durch die Punkte der Fläche von einander getrennt werden, läfst sich folgendes Resultat leicht herleiten:

Für die Innenpunkte hat die linke Seite der Gleichung I B) einen negativen und für die Aufsenpunkte einen positiven Wert.

10. Für eine Fläche I B) liegt die Polarebene zu einem Innenpunkte ganz aufserhalb der Fläche, da jeder Schnittpunkt durch seine Verbindung mit dem Punkte eine von diesem ausgehende Tangente liefern würde. Umgekehrt mufs die Polarebene zu jedem Aufsenpunkte die Berührungspunkte der von ihm ausgehenden Tangenten enthalten und somit die Fläche schneiden. Hiernach ist der Pol einer jeden nichtschneidenden Ebene ein Innenpunkt und der Pol einer jeden schneidenden Ebene ein Aufsenpunkt.

11. Wir beweisen noch für die Fläche I B) folgenden Lehrsatz:

Von zwei reciproken Polaren, die keinen Punkt mit einander gemeinschaftlich haben, schneidet regelmäfsig nur die eine, während durch die andere zwei Tangentialebenen hindurchgehen.

Durch eine Gerade, von welcher eine Fläche I B) geschnitten wird, geht keine Tangentialebene hindurch, weil eine solche Ebene nur einen Punkt mit der Fläche gemeinschaftlich hat. Dagegen kann man in den Schnittpunkten die Tangentialebenen an die Fläche legen, und diese schneiden einander in der reciproken Polaren. Da durch die letztere Gerade Tangentialebenen gelegt werden können, darf sie keine Sekante sein. Wenn umgekehrt eine Gerade keinen Punkt mit der Fläche gemeinschaftlich hat, so lassen sich durch sie (als Grenze der schneidenden und nichtschneidenden Ebenen) zwei Tangentialebenen an die Fläche legen; die Verbindungslinie ihrer Berührungspunkte ist die reciproke Polare.

12. Die Gleichung I C) wird befriedigt, wenn wir bei einem beliebigen Werte von μ setzen:

$$(1)\quad x_1 + x_3 = \mu(x_2 + x_4),\ x_4 - x_2 = \mu(x_1 - x_3).$$

Jedes derartige Paar von Gleichungen stellt eine gerade Linie dar, welche ganz der Fläche angehört. Indem man dem Koefficienten μ alle möglichen Werte beilegt, erhält man eine Schar von Geraden, die auf der Fläche liegen. Eine zweite Schar wird durch die Gleichungen dargestellt:

$$(2)\quad x_1 + x_3 = \nu(x_4 - x_2),\ x_2 + x_4 = \nu(x_1 - x_3).$$

Alle Geraden derselben Schar liegen windschief gegen einander; beständen nämlich die vier Gleichungen

$$x_1 + x_3 = \mu(x_2 + x_4),\ x_4 - x_2 = \mu(x_1 - x_3)$$

und

$$x_1 + x_3 = \mu'(x_2 + x_4),\ x_4 - x_2 = \mu'(x_1 - x_3)$$

bei verschiedenem Werte von μ und μ' für dasselbe Wertsystem $(x_1 \ldots x_4)$, so müfste sein:

$$x_1 + x_3 = 0,\ x_2 + x_4 = 0,\ x_4 - x_2 = 0,\ x_1 - x_3 = 0$$

$$\text{oder } x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0,$$

was ausgeschlossen ist. Dagegen schneiden sich zwei beliebige Geraden, die verschiedenen Scharen angehören. Setzt man nämlich $x_1 - x_3 = \varrho$, $x_1 + x_3 = \mu\nu\varrho$, $x_4 - x_2 = \mu\varrho$, $x_4 + x_2 = \nu\varrho$ für einen ganz beliebigen Wert von ϱ, so werden die Gleichungen (1) und (2) befriedigt. Der Punkt $(\mu\nu - 1,\ \nu - \mu,\ \mu\nu + 1,\ \nu + \mu)$ gehört also den beiden Geraden (1) und (2) an.

Umgekehrt geht durch jeden Punkt der Fläche sowohl eine Gerade aus der Schar (1) als auch aus der Schar (2). Man kann nämlich die Quotienten $\frac{x_2}{x_4}$ und $\frac{x_1 + x_3}{x_4}$ willkürlich wählen und dann den Quotienten $\frac{x_2 - x_3}{x_4}$ vermittelst der Gleichung der Fläche berechnen. Somit finden wir einen Wert von μ und von ν.

13. Jede durch zwei Gerade der Fläche gelegte Ebene berührt dieselbe im Schnittpunkte der beiden Geraden (§ 13, 5). Daraus geht hervor, dafs aufser den beiden Scharen (1) und (2) keine weiteren Geraden der Fläche angehören. Denn angenommen, die Fläche enthielte noch eine Gerade, die zu keiner dieser Scharen gehörte, so gingen durch jeden Punkt dieser Geraden drei gerade

Linien der Fläche hindurch. Diese können nicht in einer Ebene liegen, weil die Ebene, wenn sie nicht ganz der Fläche angehören soll, nur eine eigentliche oder eine zerfallende Kurve zweiter Ordnung mit der Fläche gemein haben kann. Es müfsten somit die drei Ebenen verschieden sein, welche durch je zwei dieser Ebenen gelegt werden können. Da zudem jede von ihnen eine Tangentialebene sein müfste, erhielte man in einem Punkte drei Tangentialebenen, was nicht angeht.

Hiernach zerfallen die Ebenen des Raumes der Fläche gegenüber in zwei Gruppen: die Ebenen der einen Gruppe schneiden in einem eigentlichen reellen Kegelschnitt; die der andern Gruppe, die Tangentialebenen, haben ein reelles Geradenpaar mit der Fläche gemein.

Für jedes beliebige Polartetraeder erhalten zwei Quadrate das positive, zwei das negative Vorzeichen.

14. Durch jeden Punkt des Raumes, der der gegebenen Fläche IC) nicht angehört, kann man an die Fläche sowohl schneidende als auch nichtschneidende Gerade ziehen. Davon überzeugt man sich am leichtesten, wenn man den Satz benutzt, nach welchem keine Gerade ganz im Innern eines Kegels liegen kann. Nach diesem Satze mufs jede Gerade der Fläche und somit auch die Fläche selbst ganz im Äufsern des Tangentialkegels liegen, der von dem gegebenen Punkte ausgeht. Somit können die vom Scheitel dieses Kegels in das Innere gezogenen Geraden keinen Punkt mit der Fläche gemein haben, während die von diesem Punkte ausgehenden Geraden, welche im Äufsern des Kegels liegen, die Fläche schneiden müssen.

Will man von diesem Satze keinen Gebrauch machen, so kann man in folgender Weise verfahren. Es sei $(\xi_1 \ldots \xi_4)$ ein beliebiger Punkt, welcher nicht der Fläche angehört, dessen Koordinaten also der Bedingung genügen:

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2 - \xi_4^2 \gtrless 0.$$

Für die Verbindungslinie desselben mit einem Punkte (x') sind die Koordinaten den Gröfsen

$$x_1' + \varrho\xi_1,\ x_2' + \varrho\xi_2,\ x_3' + \varrho\xi_3,\ x_4' + \varrho\xi_4$$

proportional. Daher ergeben sich die Schnittpunkte mit der Fläche IC) aus der Gleichung:

$$\varrho^2(\xi_1^2+\xi_2^2-\xi_3^2-\xi_4^2)+2\varrho((\xi_1x_1'+\xi_2x_2'-\xi_3x_3'-\xi_4x_4')+(x_1'^2+x_2'^2-x_3'^2-x_4'^2)=0.$$

Um eine nichtschneidende Gerade zu erhalten, wähle man für den Fall, daſs $\xi_1^2+\xi_2^2-\xi_3^2-\xi_4^2>0$ ist,

$$x_3'=x_4'=0,\ x_1'\xi_1+x_2'\xi_2=0,$$

und für $\xi_1^2+\xi_2^2-\xi_3^2-\xi_4^2<0$

$$x_1'=x_2'=0,\ x_3'\xi_3+x_4'\xi_4=0.$$

In ähnlicher Weise findet man schneidende Gerade; indessen ist es nicht nötig, das eigens zu beweisen, da offenbar von jedem Punkte (ξ) Linien ausgehen, von denen die Fläche geschnitten wird.

15. Für die geradlinigen Flächen gilt folgender Satz:

Durch jede Gerade, welche die Fläche in zwei Punkten schneidet, gehen auch zwei Tangentialebenen, und durch eine nichtschneidende Gerade lassen sich auch keine Tangentialebenen legen. Zwei windschief zu einander gelegene reciproke Polare sind entweder beide schneidende oder beide nichtschneidende Gerade.

Wenn eine Gerade die Fläche in den Punkten 1 und 2 schneidet, so gehen durch 1 zwei Gerade g_1 und h_1 und durch 2 zwei Gerade g_2 und h_2 hindurch; hier sollen g_1 und g_2 derselben Schar angehören und ebenso h_1 und h_2. Dann läſst sich sowohl durch g_1 und h_2, wie durch g_2 und h_1 eine Ebene legen; jede von ihnen ist eine Tangentialebene, welche durch die Punkte 1 und 2, also durch die gegebene Gerade geht.

Geht umgekehrt durch eine Gerade l eine Tangentialebene, ohne daſs der Berührungspunkt in l liegt, so wird l von den beiden in dieser Ebene gelegenen Erzeugenden geschnitten; die Gerade l hat also zwei Schnittpunkte mit der Fläche.

Es seien jetzt l und l′ zwei reciproke Polare, die keinen Punkt gemeinschaftlich haben. Wenn l die Fläche nicht schneidet, so kann durch l′ keine Tangentialebene gehen; also hat auch l′ keinen Schnittpunkt mit der Fläche. Wird umgekehrt l von der Fläche geschnitten, so gehen die in ihren Schnittpunkten an die Fläche gelegten Tangentialebenen durch l′; demnach hat auch l′ zwei Schnittpunkte mit der Fläche.

Zu demselben Resultate gelangt man auch durch folgende Erwägung. Eine beliebige Gerade, von der die Fläche nicht berührt wird, wählt man zu der einen Kante des Polartetraeders.

Indem man dies Tetraeder zur Koordinatenbestimmung benutzt und den Einheitspunkt passend wählt, kann man der Gleichung der Fläche die Form I C) geben. Diese Fläche wird aber sowohl von der Geraden $x_1 = x_2 = 0$, wie von ihrer reciproken Polaren nicht geschnitten; dagegen sind die beiden Geraden $x_1 = x_3 = 0$ und $x_2 = x_4 = 0$ Sekanten der Fläche. Damit die Tangentialebene

$$x_1x_1' + x_2x_2' - x_3x_3' - x_4x_4' = 0$$

durch die Gerade $x_1 = x_2 = 0$ hindurchgeht, muſs $x_3' = x_4' = 0$ sein u. s. w. Daraus ergeben sich wieder die obigen Behauptungen.

16. Um eine neue Entstehungsweise der Fläche I C) kennen zu lernen, schlagen wir folgenden Weg ein. Wir wählen drei windschiefe Gerade und auf jeder drei Punkte willkürlich aus. Durch diese neun Punkte legen wir eine Fläche zweiter Ordnung. (Daſs durch diese neun Punkte eine einzige Fläche hindurchgeht, ergiebt sich unmittelbar aus den folgenden Erwägungen.) Der konstruierten Fläche gehören (nach § 11, 8) die drei Geraden vollständig an. Durch jeden Punkt einer dieser Geraden kann man aber eine gerade Linie legen, welche die beiden anderen Linien schneidet. Diese Gerade hat drei und somit alle ihre Punkte mit der Fläche gemein. Demnach liegt jede Gerade, welche die drei gegebenen Linien schneidet, in der Fläche. Diese enthält also eine Schar zu einander windschiefer Geraden.

Die durch irgend drei Linien h_1, h_2, h_3 dieser Schar gelegte Fläche zweiter Ordnung muſs jede Gerade g' enthalten, welche die drei Linien h_1, h_2, h_3 schneidet; auf der Fläche liegt daher eine zweite Schar von Geraden. Daraus folgt der Satz:

Wenn eine gerade Linie sich so bewegt, daſs sie immer durch drei gegebene windschiefe Gerade hindurchgeht, so erzeugt sie eine Fläche zweiter Ordnung.

17. Stellt man die Gleichung eines Kegels durch drei Quadrate dar, so gelangt man auf eine der beiden Formen:

$$\text{II A)}\quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$$
$$\text{II B)}\quad x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

Diese beiden Arten, der imaginäre und der reelle Kegel, sind bereits in § 10, 7—9 eingehend charakterisiert. Wir erinnern nur noch daran, daſs für den imaginären Kegel kein Strahl in

seine Polarebene fällt. Auch wollen wir nochmals darauf hinweisen, daſs einem reellen Kegel gegenüber die Ebenen des Raumes in zwei Hauptgruppen zerfallen, jenachdem sie durch die Spitze gehen oder nicht. Die Ebenen der zweiten Gruppe werden von jeder Erzeugenden getroffen, haben also mit dem Kegel einen eigentlichen reellen Kegelschnitt gemeinschaftlich. Die Ebenen der ersten Gruppe zerfallen wieder in drei Unterabteilungen: entweder ist die gemeinschaftliche Linie ein reelles Geradenpaar (die Ebene schneidet den Kegel), oder sie ist eine Doppelgerade (die Ebene berührt den Kegel), oder das gemeinschaftliche Geradenpaar ist imaginär.

18. Die Gleichung eines Ebenenpaares kann auf eine der beiden Formen gebracht werden:

$$\text{III A)}\quad x_1^2 + x_2^2 = 0,$$
$$\text{III B)}\quad x_1^2 - x_2^2 = 0.$$

Im ersten Falle ist nur die singuläre Gerade reell, die Ebenen selbst sind imaginär. Die Involution, welche durch die Zuordnung konjugierter Ebenen erzeugt wird, hat keine reellen Hauptebenen.

Die Gleichung $x_1^2 - x_2^2 = 0$ kann auch in der Form

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$$

geschrieben werden; sie stellt ein reelles Ebenenpaar dar. Die Ebenen desselben sind die Hauptebenen der Involution; zwei Ebenen sind konjugierte Polarebenen, wenn sie zu den Ebenen des Paares harmonisch liegen.

19. Da für die Doppelebene eine weitere Einteilung nicht möglich ist, so erhalten wir folgende Einteilung der Flächen zweiter Ordnung:

I. Flächen zweiter Ordnung und zweiter Klasse:
   A) Imaginäre eigentliche Fläche zweiter Ordnung.
   B) Reelle ungeradlinige Fläche.
   C) Geradlinige Fläche.

II. Kegelfläche zweiter Ordnung:
   A) Der imaginäre Kegel.
   B) Der reelle Kegel.

III. Das Ebenenpaar:
   A) Das imaginäre Ebenenpaar.
   B) Das reelle Ebenenpaar.

IV. Die Doppelebene.

Übungen:

1) a) Ist für positive Werte von α_1, α_2, α_3 eine Fläche durch die Gleichung bestimmt

$$\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 = x_4^2,$$

so ist der Punkt (x') ein Aufsen- oder ein Innenpunkt, jenachdem der Ausdruck

$$\alpha_1 x_1'^2 + \alpha_2 x_2'^2 + \alpha_3 x_3'^2 - x_4'^2$$

positiv oder negativ ist.

b) Die Ebene $(u_1 \dots u_4)$ wird die Fläche schneiden, berühren oder ganz aufserhalb derselben liegen, jenachdem der Ausdruck

$$\frac{u_1^2}{\alpha_1} + \frac{u_2^2}{\alpha_2} + \frac{u_3^2}{\alpha_3} - u_4^2$$

einen positiven, verschwindenden oder negativen Wert hat.

c) Welche von den Kanten des Koordinaten-Tetraeders schneiden die Fläche, und durch welche lassen sich Tangentialebenen an dieselbe legen?

d) Man vergleiche mit c) den in 11. angegebenen Lehrsatz.

2) a) Welche von den Kanten des Koordinaten-Tetraeders schneiden die Fläche

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0,$$

und durch welche Kanten lassen sich Tangentialebenen an die Fläche legen?

b) Man vergleiche hiermit den in 15. bewiesenen Lehrsatz.

3) a) Man bestimme die geraden Linien der Fläche:

$$x_1 x_2 - x_3 x_4 = 0.$$

b) Man zeige, dafs jede Ebene $x_1 + \alpha x_3 = 0$ und jede Ebene $x_1 + \beta x_4 = 0$ eine Tangentialebene der Fläche ist. Welches ist in jedem Falle der Berührungspunkt?

c) Welche Lage zur Fläche hat eine beliebige durch je zwei Gegenkanten des Koordinaten-Tetraeders gelegte Gerade (erstens eine Gerade durch $x_1 = x_2 = 0$ und $x_3 = x_4 = 0$, zweitens durch $x_1 = x_3 = 0$ und $x_2 = x_4 = 0$ und drittens durch $x_1 = x_4 = 0$ und $x_2 = x_3 = 0$)?

d) Man soll für die in c) angegebenen Geraden angeben, ob sich durch sie Tangentialebenen legen lassen oder nicht.

4) Durch drei windschiefe gerade Linien eine Fläche zweiter Ordnung zu legen.

a) Man wähle in h_3 zwei Punkte beliebig aus und lege durch jeden unter ihnen eine Gerade, welche die Linien h_1 und h_2 schneidet. Sind g_1 und g_2 diese geraden Linien, so wähle man die Ebenen (g_1, h_1), (g_1, h_2), (g_2, h_2), (g_2, h_1) zu Koordinatenebenen.

b) Man lege der Untersuchung ein beliebiges Koordinaten-Tetraeder zu Grunde und denke sich den Punkt (x) so bestimmt, daſs sich durch ihn und die drei gegebenen Linien eine vierte Gerade hindurchlegen läſst. Es seien (ξ) und (η) zwei Punkte der ersten, (ξ') und (η') zwei Punkte der zweiten, (ξ'') und (η'') zwei Punkte der dritten geraden Linie. Alsdann ziehe man durch den Punkt (x) und einen bestimmten Punkt $(\xi + \varkappa\eta)$ der ersten Geraden eine gerade Linie und frage nach den Bedingungen, unter denen diese die beiden andern gegebenen Geraden schneidet. Damit die durch die beiden Punkte (ξ') und (η') gehende Gerade getroffen wird, müssen (für $\alpha = 1, 2, 3, 4$) die Gleichungen befriedigt werden:

$$\xi\alpha + \varkappa\eta\alpha + \lambda x\alpha = \nu\xi\alpha' + \varrho\eta\alpha';$$

ebenso muſs sein:

$$\xi\alpha + \varkappa\eta\alpha + \mu x\alpha = \sigma\xi\alpha'' + \tau\eta\alpha''.$$

Das sind in den acht Gröſsen $1, \varkappa, \lambda, \mu, -\nu, -\varrho, -\sigma, -\tau$ acht lineare Gleichungen. Die Bedingung für die Lage des Punktes (x) besteht in dem Verschwinden einer Determinante, deren vier erste Zeilen sind:

$$\xi\alpha \quad \eta\alpha \quad x\alpha \quad 0 \quad \xi\alpha' \quad \eta\alpha' \quad 0 \quad 0,$$

während die vier letzten Zeilen sind:

$$\xi\alpha \quad \eta\alpha \quad 0 \quad x\alpha \quad 0 \quad 0 \quad \xi\alpha'' \quad \eta\alpha''.$$

c) Durch b) ist ein direkter Beweis dafür geliefert, daſs alle geraden Linien, von denen drei windschiefe gerade Linien getroffen werden, einer Fläche zweiter Ordnung angehören.

d) Man zeige nachträglich, daſs die in b) gefundene Gleichung eine Fläche darstellt, welche durch die drei gegebenen Geraden geht.

e) Zur Übung stelle man die Gleichung der Fläche in expliciter Form auf.

5) a) Sobald man von einer Fläche zweiter Ordnung zwei ihr angehörende windschiefe Gerade und einen Punkt kennt, kann man eine weitere Gerade der Fläche bestimmen.

(Es ist das diejenige Gerade, welche von dem gegebenen Punkte aus durch die beiden gegebenen Geraden hindurch gelegt werden kann.)

b) Sobald man von einer Fläche zwei ihr angehörende windschiefe Gerade und eine Tangentialebene kennt, kann man noch eine weitere Gerade der Ebene bestimmen.

6) a) Durch ein windschiefes Viereck und einen weiteren Punkt läfst sich eine einzige Fläche zweiter Ordnung legen.

b) Wenn von einer Fläche zweiter Ordnung ein windschiefes Viereck und ein weiterer Punkt gegeben sind, so soll man die Tangentialebene der Fläche in dem gegebenen Punkte konstruieren.

(Das Viereck sei $\alpha\beta\gamma\delta$, der Punkt π; die Gerade durch π, $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ und die Gerade durch π, $\delta\alpha$, $\beta\gamma$ gehören der gesuchten Ebene an.)

c) Wenn von einer Fläche zweiter Ordnung ein windschiefes Viereck und eine Tangentialebene gegeben sind, so soll man den Berührungspunkt der Ebene finden.

d) Von einer Fläche zweiter Ordnung kennt man zwei windschiefe Gerade und aufserdem

entweder drei Punkte,
oder zwei Punkte und eine Tangentialebene,
oder einen Punkt und zwei Tangentialebenen,
oder drei Tangentialebenen;

man soll weitere Erzeugende der Fläche bestimmen.

7) a) Damit die Ebene $x_4 = 0$ die Fläche $\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$ berührt, mufs die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

verschwinden.

(Die der Tangentialebene und der Fläche gemeinsame Kurve mufs zerfallen.)

b) Wie lautet hiernach die Bedingung dafür, dafs eine andere Koordinatenebene die Fläche berührt?

8) a) Wenn eine gerade Linie drei Punkte mit einer Fläche zweiter Ordnung gemeinsam hat, so fällt sie ganz in die Fläche hinein.

b) Wenn durch eine gerade Linie drei Tangentialebenen an

eine Fläche zweiter Ordnung gelegt werden können, so wird die Fläche von jeder die Gerade enthaltenden Ebene berührt.

(Die Gleichung, vermittelst deren die durch eine Gerade hindurchgehenden Tangentialebenen bestimmt werden, ist vom zweiten Grade; wenn diese drei Lösungen hat, so müssen alle ihre Koefficienten verschwinden. Man kann den Beweis auch auf die Bemerkung gründen, daſs zu den Berührungspunkten der drei Tangentialebenen jeder Punkt der Geraden konjugierter Pol ist.)

9) a) Man setze die Determinante aus den Koefficienten in der Gleichung der Fläche gleich A, und nenne A_1 diejenige Determinante, welche aus A durch Weglassung der letzten Zeile und Kolonne entsteht; ebenso bilde man aus A_1 die Determinante A_2 und aus A_2 die A_3. Alsdann ist:

$$A_1 = \Sigma \pm a_{11}a_{22}a_{33},\quad A_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2,\quad A_3 = a_{11}.$$

Wenn die Gleichung eine eigentliche imaginäre Fläche sein soll, so darf keine der vier Gröſsen A, A_1, A_2, A_3 verschwinden.

(Für $A = 0$ wird eine uneigentliche Fläche dargestellt; für $A_1 = 0$ ist die Ebene $x_4 = 0$ eine reelle Tangentialebene; für $A_2 = 0$ berührt die Gerade $x_3 = x_4 = 0$ in einem reellen Punkte; für $A_3 = 0$ gehört der Punkt (1, 0, 0, 0) der Fläche an.)

b) Wenn die Werte von A, A_1, A_2, A_3 sämtlich positiv mit Ausschluſs der Null sind, so kann man die Gleichung in vier positive Quadrate umwandeln.

Die Gleichung $\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa - \omega x_4^2 = 0$ stellt für $\omega = A : A_1$ einen Kegel dar. Demnach kann man im Anschluſs an Übung 2) a) von § 15 drei Koefficienten λ, μ, ν so bestimmen, daſs für

$$y_1 = x_1 + \lambda x_4,\quad y_2 = x_2 + \mu x_4,\quad y_3 = x_3 + \nu x_4$$

identisch ist:

$$\sum_{(1\ldots4)} a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa - \frac{A}{A_1} x_4^2 = \sum_{(1,2,3)} a_{\iota\varkappa} y_\iota y_\varkappa.$$

Jetzt behandle man die Form $\Sigma a_{\iota\varkappa} y_\iota y_\varkappa$ in gleicher Weise und gebe ihr die Gestalt:

$$\frac{A_1}{A_2} y_3^2 + (a_{11}z_1^2 + 2a_{12}z_1z_2 + a_{22}z_2^2).$$

Indem man endlich noch setzt

$$a_{11}z_1^2 + 2a_{12}z_1z_2 + a_{22}z_2^2 = \frac{A_2}{A_3} z_2^2 + a_{11}w_1^2,$$

erhält man für die gegebene Gleichung die Form:

$$\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa = \frac{A}{A_1} x_4^2 + \frac{A_1}{A_2} y_3^2 + \frac{A_2}{A_3} z_2^2 + A_3 w_1^2.$$

c) Wenn keiner der vier Ausdrücke A, A_1, A_2, A_3 verschwindet, A und A_2 einen positiven, A_1 und A_3 einen negativen Wert haben, so kann man die gegebene Gleichung in eine Summe von vier negativen Quadraten umwandeln.

d) Soll die Gleichung $\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa = 0$ eine eigentliche imaginäre Fläche darstellen, so müssen die drei Ausdrücke A, A_2, $A_1 A_3$ einen positiven, nicht verschwindenden Wert haben.

e) Wenn jede der drei Gröfsen A, $A_1 A_3$ und A_2 einen positiven, von null verschiedenen Wert hat, so haben die vier Koefficienten $a_{\iota\iota}$ und die vier Determinanten $\Sigma \pm a_{\iota\iota} a_{\varkappa\varkappa} a_{\lambda\lambda}$ dasselbe Vorzeichen; ferner sind alle Determinanten $a_{\iota\iota} a_{\varkappa\varkappa} - a_{\iota\varkappa}^2$ positiv und von null verschieden.

(Man führe die in b) angegebene Umwandlung in anderer Reihenfolge aus.)

f) Wenn A, A_1, A_2, A_3 von null verschieden sind, so stellt die Gleichung eine reelle, nicht geradlinige Fläche dar, falls entweder

α) diese vier Gröfsen negativ sind,

β) alle bis auf A_3 negativ sind,

γ) A und A_1 negativ, A_2 und A_3 positiv sind,

δ) alle bis auf A positiv sind,

ε) alle bis auf A_2 positiv sind,

ζ) A_1 und A_2 positiv, A und A_3 negativ sind,

η) A und A_2 positiv, A_1 und A_3 negativ sind.

(Man führe die in b) angegebene Transformation durch.)

g) Wenn A, A_1, A_2, A_3 von null verschieden sind, so stellt die Gleichung eine geradlinige Fläche dar, falls entweder

α) alle bis auf A_3 positiv sind,

β) alle bis auf A_1 positiv sind,

γ) A und A_1 positiv, A_2 und A_3 negativ sind,

δ) A und A_3 positiv, A_1 und A_2 negativ sind,

ε) alle bis auf A_2 positiv sind,

ζ) alle bis auf A negativ sind.

h) Wenn A und A_2 von null verschieden, aber $A_1 = 0$ ist, so stellt die Gleichung eine geradlinige oder ungeradlinige Fläche dar, jenachdem A_2 negativ oder positiv ist.

i) Wenn $A_2 = 0$ ist, aber A und A_1 von null verschieden sind, so ist die Fläche geradlinig oder ungeradlinig, jenachdem A positiv oder negativ ist.

(Man beachte die Linie, welche die obige Ebene $y_3 = 0$ mit der Fläche gemeinschaftlich hat.)

k) Für $A = 0$ stellt die Gleichung bekanntlich einen Kegel dar. Wenn jetzt aufserdem noch $A_1 = A_2 = A_3 = 0$ ist, so geht entweder die Ebene $x_4 = 0$ durch die Spitze des Kegels oder der Punkt $(1, 0, 0, 0)$ ist die Spitze, oder drittens die Kante $x_3 = x_4 = 0$ gehört dem Kegel an und die beiden andern Schnittlinien der Ebenen $x_3 = 0$ und $x_4 = 0$ liegen mit der Kante $x_1 = x_2 = 0$ in einer Ebene.

l) Wenn $A = 0$ ist, aber A_2 und das Produkt $A_1 A_3$ positiv sind, so stellt die Gleichung einen imaginären Kegel dar.

m) Wenn $A = 0$, A_2 negativ, aber das Produkt $A_1 A_3$ positiv ist, so stellt die Gleichung einen reellen Kegel dar.

n) Wenn A_2 von null verschieden, aber die drei mit A_2 gebildeten dreireihigen Unterdeterminanten null sind, so stellt die Gleichung ein reelles oder imaginäres Ebenenpaar dar, jenachdem A_2 positiv oder negativ ist.

(Man beachte die Übung 2) von § 16.)

10) a) Von den vier Eckpunkten eines Polartetraeders einer ungeradlinigen Fläche zweiter Ordnung liegen stets drei im Äufsern und einer im Innern der Fläche; dagegen verteilen sich die vier Eckpunkte eines Polartetraeders für eine geradlinige Fläche zu zweien auf die beiden Raumteile, in welche der Raum durch die Fläche zerlegt wird.

b) Wenn A negativ, A_1, A_2, A_3 positiv sind, so liegt jeder Punkt, für den $\Sigma a_{ix} x_i x_x$ positiv ist, im Äufsern, und jeder Punkt, für den der Wert von $\Sigma a_{ix} x_i x_x$ negativ ist, im Innern der Fläche.

11) Welche Arten von Schnittkurven kann eine Ebene haben

a) mit einer eigentlichen Fläche zweiter Ordnung,

b) mit einer Kegelfläche zweiter Ordnung,

c) mit einem Ebenenpaare,

d) mit einer Doppelebene?

12) Welche Möglichkeiten bestehen nach der in Üb. 11) angegebenen Richtung:

a) für eine geradlinige Fläche,
b) für einen reellen Kegel,
c) für ein reelles Ebenenpaar,
d) für eine ungeradlinige Fläche,
e) für eine imaginäre Fläche,
f) für einen imaginären Kegel,
g) für ein imaginäres Ebenenpaar?

13) a) Es giebt im allgemeinen zwei gerade Linien, von denen vier willkürlich gegebene gerade Linien getroffen werden.

(Man lege durch drei von ihnen eine geradlinige Fläche zweiter Ordnung und bestimme die Schnittpunkte mit der vierten Geraden.)

b) Es seien vier windschiefe gerade Linien gegeben; wenn die durch die drei ersten gelegte Fläche zweiter Ordnung die vierte Gerade in zwei reellen Punkten schneidet, so hat auch die durch irgend drei unter ihnen gelegte Fläche zweiter Ordnung jedesmal mit der übrigbleibenden Geraden zwei reelle Punkte gemeinschaftlich.

c) Wenn von den vier windschiefen Geraden a, b, c, d die letzte eine Tangente ist an die durch die drei ersten gehende Fläche zweiter Ordnung, so ist auch die Gerade a eine Tangente an die durch b, c, d gelegte Fläche zweiter Ordnung.

d) Wie ändern sich die unter b) und c) angegebenen Sätze, falls eine von den vier Geraden keinen Punkt mit der durch die drei andern gelegten Fläche gemeinschaftlich hat?

e) Wenn vier im Raume gegebene windschiefe gerade Linien von drei Geraden getroffen werden, so mufs jede gerade Linie, welche irgend dreien von den gegebenen Geraden begegnet, auch die vierte treffen.

14) a) Sobald eine Fläche zweiter Ordnung fünf Punkte mit einem Kegelschnitt gemeinschaftlich hat, gehört ihr derselbe ganz an.

b) Eine Fläche zweiter Ordnung ist bestimmt durch einen in ihr gelegenen Kegelschnitt und vier weitere Punkte, welche nicht in einer Ebene liegen.

c) Man kennt, nachdem die in b) angegebenen Gebilde bekannt sind, aufser dem gegebenen noch vier weitere Kegelschnitte, welche auf der Fläche liegen. Demnach kann man auch die Schnittlinie der Fläche mit einer beliebigen Ebene bestimmen.

15) a) Zwei verschiedene Kegelschnitte können nur dann auf einer Fläche zweiter Ordnung liegen, wenn sie mit der Schnittlinie ihrer Ebenen dieselben beiden (reellen oder imaginären) Punkte gemeinschaftlich haben.

b) Durch zwei in verschiedenen Ebenen gelegene Kegelschnitte, welche zwei Punkte gemeinschaftlich haben, und einen weiteren Punkt ist eine Fläche zweiter Ordnung bestimmt.

α) Man kennt die Schnittlinie einer jeden Ebene, welche durch den gegebenen Punkt gelegt werden kann.

(Speciell wähle man auf dem ersten Kegelschnitt einen Punkt α, auf dem zweiten einen Punkt β und lege durch α und β und den gegebenen Punkt π eine Ebene; alsdann kennt man die Schnittlinie dieser Ebene mit der Fläche.)

β) Die beiden Kegel, welche den gegebenen Punkt zur Spitze und je eine der gegebenen Kurven zur Leitlinie haben, schneiden sich im allgemeinen (nach § 10) in vier Kanten, von denen zwei unmittelbar gegeben sind. Wenn die beiden andern Kanten reell sind, so gehören sie der gesuchten Fläche an; diese ist also geradlinig oder ungeradlinig, jenachdem diese Kanten reell oder imaginär sind. Schneidet eine beliebige durch eine der beiden Kanten gelegte Ebene den einen Kegelschnitt in $\varkappa$, den andern in λ, so gehört auch die Gerade $\varkappa\lambda$ der Fläche an.

16) a) Ein Kegelschnitt und eine gerade Linie können nur dann auf einer (eigentlichen) Fläche zweiter Ordnung liegen, wenn sie einen Punkt gemeinschaftlich haben.

b) Durch einen Kegelschnitt und zwei ihn schneidende windschiefe gerade Linien läfst sich ein Kegelschnitt legen.

c) Wieviel Punkte werden durch die Forderung vertreten, dafs eine Fläche zweiter Ordnung durch einen Kegelschnitt und eine ihn schneidende Gerade hindurchgehen soll?

d) Kennt man von einer Fläche zweiter Ordnung einen Kegelschnitt, eine Gerade und einen Punkt, so kennt man noch eine weitere gerade Linie der Fläche.

e) Durch einen Kegelschnitt, zwei denselben und einander schneidende gerade Linien und einen Punkt ist eine Fläche zweiter Ordnung bestimmt.

f) Wie findet man, nachdem die in e) genannten Gebilde gegeben sind, die beiden von dem Punkte ausgehenden Geraden der Fläche?

§ 19.

Metrische Einteilung der Flächen zweiter Ordnung.

1. Für die weitere Einteilung der Flächen zweiter Ordnung betrachten wir die verschiedenen Lagen, welche die unendlichferne Ebene den einzelnen Flächen gegenüber einnehmen kann, die wir im vorigen Paragraphen gefunden haben. Um die Darstellung zu erleichtern, lassen wir eine der Koordinatenebenen mit der unendlichfernen Ebene zusammenfallen und wählen die drei andern Ebenen so, dafs die Gleichung möglichst einfach wird. Wenn die unendlichferne Ebene die Fläche nicht berührt, so lassen wir sie mit den drei andern Koordinatenebenen ein Polartetraeder bilden. Ist aber jene Ebene eine Tangentialebene, so lassen wir die Fläche auch durch eine zweite Koordinatenebene berührt werden; durch den Schnitt dieser beiden Ebenen legen wir zwei Ebenen eines Polartetraeders und nehmen die beiden andern Ebenen desselben als Koordinatenebenen hinzu. Auf diese Weise erhalten wir für die eigentlichen Flächen zweiter Ordnung eine der in § 18, 5 oder § 18, 7 angegebenen Formen. In der letzten Form sind die Ebenen $x_3 + x_4 = 0$ und $x_3 - x_4 = 0$ Tangentialebenen; diese ist also zu wählen, wenn die unendlichferne Ebene Tangentialebene ist. Als die drei eigentlichen Ebenen des Koordinatensystems wählen wir die Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; die unendlichferne Ebene soll durch die Gleichung $p = 0$ gegeben sein. Wir werden jedoch die Bezeichnung des § 8 wieder benutzen und demnach, wo es angeht, p durch 1 ersetzen. Auch den Einheitspunkt wählen wir, wie an der bezeichneten Stelle; daher müssen wir die Koefficienten in den Gleichungen ausdrücklich beifügen.

Durch unsere Festsetzungen ist das Koordinatensystem nicht eindeutig bestimmt; vielmehr giebt es eine dreifach unendliche Mannigfaltigkeit von Systemen, die unseren Forderungen genügen. Eine passende Specialisierung würde darin bestehen, zu verlangen, dafs das Koordinatensystem rechtwinklig sein soll. Indessen wollen wir darauf hier nicht eingehen, einerseits, weil es uns

auch ohnedies möglich wird, die Flächen zu charakterisieren, andererseits, weil diese Aufgabe an einer späteren Stelle eingehend behandelt werden soll.

2. Jede durch die Gleichung I A) dargestellte Fläche hat allen Ebenen gegenüber dieselbe Lage; daher kann auch die Einführung der unendlichfernen Ebene keine weitere Einteilung herbeiführen. Man kann daher jede Fläche dieser Art in Cartesischen Koordinaten durch eine Gleichung von der Form darstellen:

$$\text{I A)} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0.$$

3. Einer ungeradlinigen reellen Fläche zweiter Ordnung gegenüber haben die Ebenen drei verschiedene Lagen: eine Ebene kann eine solche Fläche entweder schneiden oder berühren oder ganz aufserhalb derselben liegen. Demnach zerfallen diese Flächen in drei Klassen:

a) solche, welche mit der unendlichfernen Ebene keinen Punkt gemein haben,

b) solche, welche von der unendlichfernen Ebene geschnitten werden,

c) solche, welche von der unendlichfernen Ebene berührt werden.

Die Gleichung wird im Falle

$$\text{I B) a)} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

im Falle

$$\text{I B) b)} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

im Falle

$$\text{I B) c)} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{2z}{c}.$$

4. Der Schnitt einer jeden Ebene mit der Fläche I B) a) ist eine Ellipse, da die Schnittlinie einerseits ein eigentlicher Kegelschnitt sein mufs, andererseits keine unendlichfernen Punkte enthalten darf. Der Mittelpunkt als Pol der nichtschneidenden unendlichfernen Ebene liegt im Innern der Fläche; jeder Durchmesser schneidet in zwei reellen Punkten. Wie die Gleichung zeigt, liegt die Fläche ganz im Innern eines Parallelepipedons, dessen Mittelpunkt mit dem der Fläche zusammenfällt, dessen Kanten den

Koordinatenaxen parallel sind und der Reihe nach die Längen 2a, 2b, 2c haben. Jede solche Fläche heifst ein Ellipsoid.

5. Die Fläche I B) b) wird von zwei Koordinatenebenen (den Ebenen $y = 0$ und $z = 0$) in Hyperbeln geschnitten, während die dritte (die Ebene $x = 0$) ganz in ihrem Äufsern liegt. Da ihre unendlichfernen Punkte mit den unendlichfernen Punkten des Asymptotenkegels

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

identisch sind, so wird der Charakter der Linie, in welcher die Fläche von einer Ebene geschnitten wird, durch die Lage der Ebene zum Asymptotenkegel bestimmt. Alle Ebenen, welche nur einen Mantel dieses Kegels treffen, ohne zu einer seiner Tangentialebenen parallel zu sein, gehen durch keinen unendlichfernen Punkt der Fläche, schneiden dieselbe also entweder gar nicht oder in einer Ellipse.

Wenn aber die Ebene zu einer Tangentialebene des Kegels parallel ist, so hat sie nur einen unendlichfernen Punkt mit der Fläche gemein; sie schneidet also eine Parabel aus ihr aus. Dagegen enthält jede Ebene, welche beide Kegelmäntel trifft, zwei unendlichferne Punkte der Fläche und schneidet sie demnach in einer Hyperbel. Die Fläche zerfällt, wofern man von dem Zusammenhange im Unendlichfernen absieht, in zwei getrennte Teile; sie heifst ein zweischaliges Hyperboloid.

6. Da eine beliebige Fläche I B) nur einen Punkt mit jeder Tangentialebene gemein hat, so besitzt die von der unendlichfernen Ebene berührte Fläche I B) c) nur einen unendlichfernen Punkt. Die Schnittlinie mit einer Ebene kann also keine Hyperbel sein. Im allgemeinen wird die Fläche von einer Ebene in einer Ellipse geschnitten; nur diejenigen Ebenen, welche durch den unendlichfernen Punkt hindurchgehen, welche also zur z-Axe parallel sind, schneiden aus der Fläche eine Parabel aus. Alle zu dieser Axe parallelen Geraden schneiden die Fläche in einem (eigentlichen) Punkte; sie werden Durchmesser der Fläche genannt. Wie die Gleichung zeigt, liegt die Fläche ganz auf der einen Seite der xy-Ebene. Sie heifst ein elliptisches Paraboloid.

7. Die geradlinigen Flächen I C) werden von einer Ebene entweder geschnitten oder berührt; demnach mufs auch die

unendlichferne Ebene entweder schneiden oder berühren. Eine solche Fläche kann also in Cartesischen Koordinaten entweder durch eine Gleichung von der Form:

$$\text{I C) a):}\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

oder von der Form

$$\text{I C) b):}\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{2z}{c}$$

dargestellt werden.

8. Die Fläche I C) a) liegt ganz im Äufsern des Asymptotenkegels. Wenn eine Ebene nur einen Mantel dieses Kegels trifft, so schneidet sie die Fläche in einer Ellipse; wenn sie zu einer Tangentialebene desselben parallel ist, so ist die Schnittlinie eine Parabel; dagegen hat eine Ebene, welche beide Kegelmäntel trifft, mit der Fläche eine Hyperbel gemein (Beweis wie in 5.). Schon daraus, dafs durch jeden Punkt der Fläche zwei in ihr gelegene Gerade gehen, folgt unmittelbar, dafs die Fläche nicht aus getrennten Zweigen bestehen kann. Sie wird als ein einschaliges Hyperboloid bezeichnet.

9. Die Fläche I C) b) besitzt zwei unendlichferne Gerade. Jede Ebene, welche durch eine dieser beiden Geraden geht, enthält noch eine Gerade der andern Schar. Somit sind alle Geraden derselben Schar einer festen Ebene parallel. Man kann die Fläche dadurch erzeugt denken, dafs man eine Gerade so bewegt, dafs sie einer festen Ebene parallel bleibt und zwei gegebene Gerade schneidet. Jede Ebene trifft die beiden unendlichfernen Geraden in einem Punkte; diese beiden Punkte fallen nur in dem Schnittpunkte der beiden Geraden zusammen. Daher schneiden diejenigen Ebenen, welche zur z-Axe parallel sind (welche mit andern Worten einen und damit unendlichviele Durchmesser enthalten und selbst Durchmesserebenen genannt werden), die Fläche in einer Parabel, alle andern in einer Hyperbel. Die Fläche heifst ein hyperbolisches Paraboloid.

10. Wir wollen jetzt dazu übergehen, die Kegel weiter einzuteilen, als es im vorigen Paragraphen geschehen konnte. Dabei beachten wir, dafs es Sitte ist, alle geradlinigen Flächen, deren Erzeugenden einander parallel sind, als Cylinder zu bezeichnen. Daher nennen wir jetzt diejenigen Flächen, welche wir bisher

kurz Kegel genannt haben, Kegel im weiteren Sinne und unterscheiden diese wieder als eigentliche Kegel (oder Kegel im engern Sinne) und Cylinder, jenachdem die Spitze im Endlichen oder im Unendlichfernen liegt.

Für die durch die Gleichung II A) dargestellte Fläche ist die Spitze entweder ein eigentlicher oder ein uneigentlicher Punkt. Im ersten Falle erhalten wir die Gleichung:

$$\text{II A) a):}\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0,$$

im zweiten Falle:

$$\text{II A) b):}\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0.$$

Die Fläche II A) a) nennen wir einen imaginären Kegel im engern Sinne, die Fläche II A) b) einen imaginären Cylinder.

11. Bei den Flächen, welche durch die Gleichung II B) dargestellt werden können, haben wir an erster Stelle zu unterscheiden, ob die Spitze ein eigentlicher oder ein uneigentlicher Punkt ist. Im ersten Falle wird die Gleichung:

$$\text{II B) a):}\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Diese Fläche heifst ein reeller (eigentlicher) Kegel. Wenn die zu einer beliebigen Ebene durch den Scheitel gelegte Parallelebene aufserhalb des Kegels liegt, so kann auch die erste Ebene keinen unendlichfernen Punkt der Fläche enthalten; die Schnittlinie ist eine Ellipse, und da diese geschlossen ist, gehört sie einem einzigen Mantel des Kegels an. Wenn dagegen die parallele Ebene den Kegel berührt, so hat auch die Schnittlinie mit der ersten Ebene nur einen unendlichfernen Punkt; sie ist eine Parabel. Durchschneidet die parallele Ebene in zwei Geraden, so gehören auch die unendlichfernen Punkte dieser Geraden der gegebenen Ebene und damit deren Schnittlinie an; diese ist eine Hyperbel, welche als eine in zwei Teile zerfallende Linie zum Teil je einem Mantel angehören mufs.

12. Für den Fall, dafs die unendlichferne Ebene durch die Spitze des Kegels hindurchgeht, haben wir nach § 18, 18 zu unterscheiden, ob diese Ebene in zwei imaginären oder in zwei

reellen Geraden durchschneidet, oder ob sie eine Tangentialebene ist. Dadurch erhalten wir drei verschiedene Formen:

$$\text{II B) b):}\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\text{II B) c):}\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\text{II B) d):}\quad x^2=2ay.$$

13. Im Falle II B) b) ist die Spitze der einzige unendlichferne Punkt. Während alle durch sie hindurchgehenden Ebenen in einem (reellen oder imaginären) Linienpaare schneiden, haben alle anderen Ebenen, nämlich alle diejenigen, welche nicht zu den Erzeugenden parallel sind, mit der Fläche eine Ellipse gemeinschaftlich, da dies die einzige eigentliche Kurve zweiter Ordnung ohne unendlichfernen Punkt ist. Man kann die Fläche dadurch erzeugen, daſs man eine Gerade sich parallel ihrer Anfangsrichtung längs einer Ellipse bewegen läſst. Sie heiſst ein elliptischer Cylinder.

14. Die durch die Gleichung II B) c) dargestellte Fläche hat zwei unendlichferne Gerade. Jede durch eine dieser Geraden gelegte Ebene schneidet die Fläche in einer zweiten Geraden, wenn sie nicht längs der unendlichfernen Geraden berührt. Geht die Ebene nur durch die unendlichferne Spitze des Kegels, so enthält sie zwei oder eine oder keine Erzeugende. Jede andere Ebene dagegen trifft die beiden unendlichfernen Geraden; ihre Schnittlinie hat zwei unendlichferne Punkte und ist somit eine Hyperbel. Somit gehen durch die Axe der Fläche (die z-Axe) zwei Ebenen von der Art, daſs sie keinen eigentlichen Punkt mit der Fläche gemein haben; es sind die Ebenen, welche längs einer der unendlichfernen Geraden berühren. Die zur Axe parallelen Ebenen schneiden in Erzeugenden, alle andern Ebenen in Hyperbeln. Die Fläche wird erzeugt, wenn sich eine gerade Linie parallel ihrer Anfangsrichtung längs einer Hyperbel bewegt. Daher wird sie ein hyperbolischer Cylinder genannt.

15. Der Gleichung II B) d) genügt eine Fläche, welche nur eine unendlichferne Gerade besitzt und längs derselben von der unendlichfernen Ebene berührt wird. Jede durch diese Gerade gehende Ebene schneidet in einer eigentlichen Geraden. Alle andern Ebenen treffen die unendlichferne Ebene in einem Punkte.

Wenn dieser Punkt nicht mit der Spitze zusammenfällt, so ist die Schnittlinie eine eigentliche Kurve zweiter Ordnung, welche einen einzigen unendlichfernen Punkt besitzt, eine Parabel. Somit treffen alle eigentlichen Ebenen von einer festen Stellung die Fläche in einer Geraden; die zur Axe parallelen Ebenen schneiden in Erzeugenden, alle andern Ebenen in einer Parabel. Die Fläche, ein parabolischer Cylinder, entsteht dadurch, dafs sich eine gerade Linie parallel einer festen Richtung längs einer Parabel bewegt.

16. Gehen wir jetzt zu den Ebenenpaaren über. Beim imaginären Ebenenpaare haben wir zu unterscheiden, ob die Axe eine eigentliche oder eine uneigentliche Gerade ist. Wir erhalten die beiden Gleichungen:

$$\text{III A) a):}\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0.$$

$$\text{III A) b):}\quad x^2+a^2=0.$$

Die erste stellt ein Paar schneidender, die zweite ein Paar paralleler imaginärer Ebenen dar.

17. Wenn die Axe eines reellen Ebenenpaares eine eigentliche Linie ist, so müssen auch die beiden Ebenen eigentliche Ebenen sein; die Gleichung ist in diesem Falle:

$$\text{III B) a):}\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0.$$

Dagegen sind in dem Falle, dafs die Axe im Unendlichfernen liegt, die Ebenen selbst entweder beide eigentliche Ebenen, die zu einander parallel sind, oder die eine Ebene fällt mit der unendlichfernen Ebene zusammen. Wie wir im Anfange dieses Paragraphen gesagt haben, soll die unendlichferne Ebene die Gleichung $p=0$ erhalten. Somit werden wir auf die beiden Unterabteilungen geführt:

$$\text{III B) b):}\quad x^2=a^2.$$

$$\text{III B) c):}\quad xp=0.$$

18. Was die Doppelebene betrifft, so haben wir zu unterscheiden, ob dieselbe eine eigentliche Ebene ist und durch die Gleichung:

$$\text{IV a)}\quad x^2=0$$

dargestellt werden kann, oder ob sie im Unendlichfernen liegt und dann die Gleichung erhält:

$$\text{IV b)}\quad p^2=0.$$

19. Soll die Fläche in Cartesischen Koordinaten durch eine Gleichung zweiten Grades dargestellt werden, so fallen die Formen III B) c) und IV b) aus; die übrigen Flächen gestatten folgende Einteilung:

I A) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0$: imaginäre eigentliche Fläche zweiter Ordnung.

I B) a): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$: Ellipsoid.

I B) b): $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z_2}{c^2}=1$: zweischaliges Hyperboloid.

I B) c): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{2z}{c}$: elliptisches Paraboloid.

I C) a): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$: einschaliges Hyperboloid.

I C) b): $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{2z}{c}$: hyperbolisches Paraboloid.

II A) a): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$: imaginärer Kegel.

II A) b): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$: imaginärer Cylinder.

II B) a): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$: reeller Kegel.

II B) b): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$: elliptischer Cylinder.

II B) c): $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$: hyperbolischer Cylinder.

II B) d): $x^2=2ay$: parabolischer Cylinder.

III A) a): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$: Paar von imaginären schneidenden Ebenen.

III A) b): $x^2+a^2=0$: Paar von imaginären parallelen Ebenen.

III B) a): $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$: Paar von reellen schneidenden Ebenen.

III B) b): $x^2=a^2$: Paar von reellen parallelen Ebenen.

IV $x^2=0$: Doppelebene.

Bei allgemeinen Koordinaten treten noch die Formen III B) c) und IV b) hinzu.

Übungen:

1) In welche Arten zerfallen die eigentlichen Kurven zweiter Ordnung, welche auf Flächen zweiter Ordnung liegen, und zwar

a) auf einer imaginären Fläche,

b) auf einem Ellipsoid,

c) auf einem einschaligen Hyperboloid,

d) auf einem zweischaligen Hyperboloid,

e) auf einem elliptischen Paraboloid,

f) auf einem hyperbolischen Paraboloid,

g) auf einem imaginären Kegel,

h) auf einem reellen Kegel,

i) auf einem elliptischen Cylinder,

k) auf einem hyperbolischen Cylinder,

l) auf einem parabolischen Cylinder?

2) a) Was für Linienpaare liegen auf den einzelnen unter 1) angegebenen Flächen?

b) Welche von diesen Flächen haben mit einer Berührungsebene eine (einzige) gerade Linie gemein?

c) Bei welchen Flächen kann es vorkommen, daſs sie mit einer Ebene, welche nicht längs einer geraden Linie berührt, eine einzige (eigentliche) Gerade gemein haben? Wie müssen diese Ebenen dann gewählt werden?

3) a) Jeder beliebige Durchmesser kann zur Axe eines um ein Ellipsoid beschriebenen Cylinders gewählt werden. Welches ist die Ebene, längs deren Schnittlinie die Fläche von dem Cylinder berührt wird?

b) Einem Ellipsoid können nur elliptische Cylinder umgeschrieben werden.

c) Jeder Durchmesser eines einschaligen Hyperboloids kann zur Axe eines Tangentialcylinders der Fläche gewählt werden. Die Cylinder sind entweder hyperbolisch oder elliptisch; wo liegen die Axen in jedem der beiden Fälle? Kann die Axe auf dem Asymptotenkegel liegen?

d) Wo liegen die Axen aller einem zweischaligen Hyperboloid umgeschriebenen Cylinder? Welcher Art sind dieselben?

4) a) Paraboloide können nur durch parabolische Cylinder berührt werden.

b) Welche Richtung können die Kanten eines ein Paraboloid

berührenden Cylinders nicht haben? Läfst sich für jede andere Richtung der Kanten ein Tangential-Cylinder bestimmen?

c) Ist die Gleichung des Paraboloids in der Form I B) c) oder I C) c) gegeben, so soll die Ebene bestimmt werden, längs deren Schnittkurve ein Cylinder berührt, dessen Kanten der Geraden $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$ parallel sind.

(Diese Ebene ist die Polarebene des Punktes $x_1 = x'$, $x_2 = y'$, $x_3 = z'$, $x_4 = 0$.)

5) a) In Cartesischen Koordinaten x_1, x_2, x_3 möge die Gleichung

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k + 2 \Sigma b_i x_i + c = 0$$

eine eigentliche Fläche darstellen. Diese wird ein Paraboloid, falls die Determinante $\Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33}$ verschwindet.

b) Dies Paraboloid ist elliptisch, wofern der Ausdruck

$$a_{11} a_{22} - a_{12}^2$$

von null verschieden positiv ist; dagegen stellt die Gleichung ein hyperbolisches Paraboloid dar, falls dieser Ausdruck, ohne zu verschwinden, negativ ist.

c) Die obige Fläche wird imaginär oder ein Ellipsoid, falls die Ausdrücke $a_{11} \Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33}$ und $a_{11} a_{22} - a_{12}^2$ einen positiven, von null verschiedenen Wert haben.

d) Falls die beiden in c) angegebenen Ausdrücke nicht verschwinden und mindestens einer von ihnen einen negativen Wert hat, stellt die Gleichung ein Hyperboloid dar.

6) Sobald man von einem hyperbolischen Paraboloid zwei Erzeugende derselben Schar kennt, soll man die Ebene bestimmen, der die sämtlichen Erzeugenden dieser Schar parallel sind.

(Entweder direkt zu lösen oder im Anschluſs an Üb. 5) b) in § 18.)

7) Ein Paraboloid soll durch die Seiten eines windschiefen Vierecks gehen.

a) Man bestimme die Durchmesserrichtung [§ 18; Üb. 6) c)].

b) Man konstruiere die Schnittlinie der Fläche mit einer Ebene, in welcher die Durchmesserrichtung enthalten ist.

c) Man bestimme direkt die Stellungen der beiden Ebenen, denen die Erzeugenden je einer Schar parallel sind.

8) a) Die Geraden, welche durch einen beliebigen Punkt des Raumes parallel zu den Erzeugenden der einen Schar eines ein-

fachen Hyperboloids gezogen werden können, sind die Erzeugenden eines Kegels.

b) Dieser Kegel wird auch erhalten, wenn man durch den ausgewählten Punkt die Parallelen zu den Erzeugenden der andern Schar zieht.

c) Die Geraden, welche man durch einen beliebigen Punkt des Raumes parallel zu den Erzeugenden der einen Schar eines hyperbolischen Paraboloids zieht, bilden einen ebenen Strahlenbüschel.

9) a) Wenn eine Ebene parallel ist zu einer Ebene, in welcher zwei parallele Erzeugende eines einschaligen Hyperboloids liegen, so schneidet sie die Fläche in einer Parabel.

b) Alle Ebenen, welche durch einen Punkt gehen und ein gegebenes Hyperboloid in Parabeln schneiden, umhüllen einen Kegel zweiter Ordnung.

10) a) Wenn man von einer Fläche zweiter Ordnung zwei in ihr gelegene windschiefe gerade Linien und die Richtung einer Geraden des Asymptotenkegels kennt, so soll man diejenige Erzeugende der zweiten Schar angeben, welche in der gegebenen Richtung liegt [§ 18, Üb. 5) a)].

b) Wenn auf einer Fläche zweiter Ordnung drei Erzeugende einer Schar gegeben sind, so soll man zu jeder unter ihnen die parallele Gerade der andern Schar bestimmen.

c) Wenn von einer solchen Fläche drei Erzeugende einer Schar gegeben sind, so soll man den Mittelpunkt finden.

(Eine durch zwei einander parallele Erzeugende gelegte Ebene enthält den Mittelpunkt.)

d) Wie kann man hiernach erkennen, ob die Fläche ein Hyperboloid oder ein Paraboloid ist?

11) Sobald drei zu einer Schar gehörende Erzeugende einer Fläche derselben Ebene parallel sind, ist die Fläche ein Paraboloid.

12) Ein Paraboloid soll durch zwei windschiefe Gerade und aufserdem

a) durch zwei Punkte gehen,

b) durch einen Punkt gehen und eine bestimmte Tangentialebene haben,

c) zwei gegebene Ebenen berühren.

Man soll beliebig viele Punkte und Tangentialebenen der Fläche konstruieren [§ 18, Üb. 5) d)].

13) a) Durch den Asymptotenkegel und einen Punkt ist eine Fläche zweiter Ordnung bestimmt.

b) Wo hat man den Punkt zu wählen, jenachdem die Fläche ein einschaliges oder zweischaliges Hyperboloid sein soll?

c) Durch den Asymptotenkegel und eine Tangentialebene ist eine Fläche zweiter Ordnung bestimmt.

d) Wird in c) durch die Lage der Ebene zum Kegel der Charakter der Fläche bestimmt?

14) a) Wenn man einen Kegel kennt, der zum Asymptotenkegel parallel ist, und aufserdem vier Punkte der Fläche, so soll man diese konstruieren.

b) Eine Kegelschar zweiter Ordnung habe die Eigenschaft, dafs jede ihr angehörende Gerade eine Fläche nur in einem Punkte schneidet; aufserdem kennt man vier Punkte derselben; man soll sie konstruieren.

c) Man übertrage die Aufgabe a) auf das Paraboloid.

15) a) Durch ein Tripel konjugierter Durchmesser und drei Punkte ist eine Fläche zweiter Ordnung im allgemeinen bestimmt.

b) Durch ein Tripel konjugierter Durchmesser und zwei Punkte der Fläche ist diese noch nicht bestimmt, obwohl man 16 Punkte der Fläche kennt. Man kann vielmehr durch diese 16 Punkte einen Kegel zweiter Ordnung legen, der den Scheitel des gegebenen Dreikants zum Mittelpunkte hat. Ebenso läfst sich durch diese Punkte ein Cylinder legen, der eine Gerade des Tripels zur Axe hat.

c) Alle Flächen zweiter Ordnung, welche ein gegebenes Tripel konjugierter Durchmesser haben und durch einen Punkt gehen, haben noch sieben andere Punkte gemeinschaftlich.

16) Es seien x, y, z Cartesische Punktkoordinaten und u, v, w die zugehörigen Plückerschen Ebenenkoordinaten; man soll die Bedingung dafür angeben, dafs eine gegebene Fläche

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1$$

von einer Ebene (u', v', w') in einer Parabel, Ellipse oder Hyperbel geschnitten wird.

§ 20.

Die Oberflächen zweiter Klasse.

1. Wir untersuchen diejenigen Flächen, deren Tangentialebenen der Gleichung genügen:

$$(1)\quad A_{11}u_1^2 + A_{22}u_2^2 + A_{33}u_3^2 + A_{44}u_4^2 + 2A_{12}u_1u_2 + 2A_{13}u_1u_3 + 2A_{14}u_1u_4 + 2A_{23}u_2u_3 + 2A_{24}u_2u_4 + 2A_{34}u_3u_4 = 0.$$

Indem wir wieder annehmen, dafs

$$(2)\quad A_{ix} = A_{xi}$$

ist, können wir die Gleichung (1) auch kurz in der Form schreiben:

$$(3)\quad \Sigma a_{ix}u_iu_x = 0.$$

Man sagt, eine Fläche sei von der n^{ten} Klasse, wenn die Bestimmung der Tangentialebenen, welche durch eine gegebene Gerade gelegt werden können, auf eine Gleichung n^{ten} Grades führt. Wenn eine Fläche durch eine homogene Gleichung n^{ten} Grades in Ebenenkoordinaten gegeben ist, so werden die durch die gerade Linie $u_3 = u_4 = 0$ gehenden Tangentialebenen vermittelst einer Gleichung n^{ten} Grades bestimmt, nämlich derjenigen Gleichung, die aus der Gleichung der Fläche durch Nullsetzen von u_3 und u_4 hervorgeht. Nun ändert sich der Grad einer Gleichung beim Übergange zu einem neuen Koordinatensysteme nicht; folglich führt die Aufsuchung der durch eine beliebige Gerade gehenden Tangentialebenen auf eine Gleichung n^{ten} Grades. Wir können daher den Satz aussprechen:

Wenn zwischen den Tangentialebenen einer Fläche eine homogene Gleichung n^{ten} Grades in Tetraederkoordinaten besteht, so ist die Fläche von der n^{ten} Klasse.

Hiernach stellt die Gleichung (3) eine Fläche zweiter Klasse dar.

2. Soll die Fläche (1) die Tangentialebene (u') haben, so mufs die Gleichung bestehen:

$$(4)\quad A_{11}u_1'^2 + \ldots + 2A_{12}u_1'u_2' + \ldots + 2A_{34}u_3'u_4' = 0.$$

Es ist dies eine homogene lineare Beziehung zwischen den zehn Koefficienten A_{ix}. Nun werden die Verhältnisse dieser zehn Koefficienten durch neun homogene lineare Gleichungen bestimmt. Stellen wir nämlich der Gleichung (4) entsprechend die neun Bedingungen dafür auf, dafs die Fläche durch neun Ebenen berührt

wird, so ergeben sich die Verhältnisse der Koefficienten als die von zehn Determinanten. Wenn diese Determinanten nicht sämtlich verschwinden, so giebt es eine einzige Fläche, welche der aufgestellten Forderung genügt. Bei allgemeiner Lage der neun Ebenen gilt also der Satz:

Eine Fläche zweiter Klasse ist durch neun ihrer Tangentialebenen bestimmt.

Schärfer können wir den Satz in folgender Weise aussprechen:

Sind neun Ebenen gegeben und genügt ihre gegenseitige Lage nicht besonderen Forderungen, so giebt es nur eine einzige Fläche zweiter Klasse, welche von den neun Ebenen berührt wird.

3. Um diejenigen Tangentialebenen zu finden, welche durch eine gegebene Gerade an die Fläche gelegt werden können, gehen wir am besten von zwei beliebigen Ebenen (u') und (u'') aus, welche sich in der geraden Linie schneiden, und fragen nach denjenigen Tangentialebenen, welche dem durch jene beiden Ebenen bestimmten Büschel angehören. Zu dem Zwecke haben wir in der Gleichung (3) jedes u_α durch $u_\alpha' + \omega u_\alpha''$ zu ersetzen. Wir finden also die Tangentialebenen durch Auflösung der Gleichung:

$$\Sigma A_{\iota\varkappa} (u_\iota' + \omega u_\iota'') (u_\varkappa' + \omega u_\varkappa'') = 0$$

oder

$$(5) \quad \omega^2 \Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota'' u_\varkappa'' + 2\omega \Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota' u_\varkappa'' + \Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota' u_\varkappa' = 0.$$

Bei der Herleitung dieser Gleichung haben wir von der Relation Gebrauch gemacht:

$$(6) \quad \Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota' u_\varkappa'' = \Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota'' u_\varkappa'.$$

Wenn die Wurzeln der Gleichung (5) sind ω_1 und ω_2, so stellt der Quotient $\omega_1 : \omega_2$ das Doppelverhältnis dar, in welchem die beiden Tangentialebenen zu den gegebenen Ebenen stehen. Wir sagen speciell, die Ebenen (u') und (u'') seien konjugierte Polarebenen zu einander in Bezug auf die Fläche zweiter Klasse, wenn sie harmonisch liegen zu den durch ihre Schnittlinie gehenden Tangentialebenen. Die Bedingung hierfür ist $\omega_1 + \omega_2 = 0$ oder

$$(7) \quad \Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota' u_\varkappa'' = 0.$$

4. Wir denken uns die Ebene (u') gegeben und fragen nach den sämtlichen Ebenen, welche zu ihr konjugierte Polarebenen sind. Bei der Antwort auf diese Frage müssen wir in der Gleichung (7) (u'') als variabel betrachten.

Dadurch geht diese Gleichung über in

$$(8) \quad \Sigma A_{ix} u_i' u_x = 0,$$

die wir auch in der Form schreiben können:

$$u_1 \Sigma A_{1x} u_x' + u_2 \Sigma A_{2x} u_x' + u_3 \Sigma A_{3x} u_x' + u_4 \Sigma A_{4x} u_x' = 0.$$

Diese Gleichung stellt, falls nicht die Koefficienten von u_1, u_2, u_3, u_4 sämtlich verschwinden, einen Punkt dar. Indem wir vorläufig annehmen, die vier Koefficienten würden für kein Wertsystem $(u_1' \ldots u_4')$ gleich null, können wir den Satz aussprechen:

Die Polarebenen zu einer festen Ebene in Bezug auf eine Fläche zweiter Klasse gehen durch einen festen Punkt, den Pol der Ebene.

5. Wie man bei der gemachten Annahme zu jeder Ebene einen bestimmten Pol erhält, so kann man auch umgekehrt unter dieser Annahme jeden Punkt zum Pol nehmen und daraus die entsprechende Ebene bestimmen. Damit nämlich der Punkt

$$(9) \quad \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \gamma_3 u_3 + \gamma_4 u_4 = 0$$

der Pol der Ebene (u') ist, darf die Gleichung (8) sich von der Gleichung (9) nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden; es müssen also die Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned}
A_{11} u_1' + A_{12} u_2' + A_{13} u_3' + A_{14} u_4' &= \varrho \gamma_1 \\
A_{21} u_1' + A_{22} u_2' + A_{23} u_3' + A_{24} u_4' &= \varrho \gamma_2 \\
A_{31} u_1' + A_{32} u_2' + A_{33} u_3' + A_{34} u_4' &= \varrho \gamma_3 \\
A_{41} u_1' + A_{42} u_2' + A_{43} u_3' + A_{44} u_4' &= \varrho \gamma_4.
\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich, wenn γ_1, γ_2, γ_3, γ_4, ϱ beliebig gewählt sind, die Gröfsen u_1', u_2', u_3', u_4' eindeutig bestimmen, wofern die Determinante

$$(10) \quad \begin{vmatrix} A_{11} & \ldots & A_{14} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{41} & \ldots & A_{44} \end{vmatrix}$$

von null verschieden ist, wie wir vorläufig annehmen.

6. Wenn die Ebene (u') eine Tangentialebene der Fläche ist, wenn also die Gleichung erfüllt ist:

$$\Sigma A_{ix} u_i' u_x' = 0,$$

und aufserdem noch die Gleichung besteht:

$$\Sigma A_{ix} u_i' u_x'' = 0,$$

so hat die Gleichung (5), falls nicht auch $\Sigma A_{ix} u_i'' u_x'' = 0$ ist, nur die eine Wurzel $\omega = 0$. In dem durch die Ebenen (u') und (u'') bestimmten Büschel giebt es alsdann keine andere Tangential-

ebene als die Ebene (u'); es muſs also die Ebene (u'') durch den Berührungspunkt gehen. Demnach stellt die Gleichung (8), wenn die Ebene (u') eine Tangentialebene ist, ihren Berührungspunkt dar.

Ähnlich wie bei den Flächen zweiter Ordnung die Berührungsebene sich als die Polarebene eines jeden Punktes der Fläche ergab, läſst sich auch hier durch geometrische Betrachtungen zeigen, daſs zu jeder Tangentialebene der Berührungspunkt der Pol in Bezug auf die Fläche zweiter Klasse ist.

7. Wenn eine Tangentialebene und eine zweite Ebene konjugierte Polarebenen sind, so muſs der Pol der zweiten Ebene auf der Tangentialebene liegen. Die zweite Ebene ist konjugierte Polarebene zu jeder Ebene, welche in einem ihrer Schnittpunkte mit der Fläche berührt. Demnach gehen die Tangentialebenen, welche längs der Schnittlinie einer Ebene an die Fläche gelegt werden können, durch einen festen Punkt, den Pol der gegebenen Ebene. Da dieser Satz rein analytisch, also auch für eine imaginäre Schnittlinie gilt, so bleibt die Beziehung zwischen Pol und Polarebene ungeändert, mag man die vorgelegte Fläche als eine Fläche von der zweiten Ordnung oder von der zweiten Klasse auffassen. Mit andern Worten: Es sei eine eigentliche Fläche zweiter Ordnung gegeben und in Bezug auf sie zu einem beliebigen Punkte die Polarebene konstruiert; dann wird die Verbindungslinie des Pols mit einem beliebigen Punkte der Polarebene jedesmal in den Schnittpunkten mit der Fläche harmonisch geteilt; zugleich liegen aber die Tangentialebenen, welche durch eine beliebige, der Polarebene angehörende Gerade an die Fläche gelegt werden können, harmonisch zu dieser Ebene und derjenigen, welche die gewählte Gerade mit dem Pole verbindet.

8. Wenn die Ebene (u') eine Tangentialebene der Fläche (3) ist, so ist die Gleichung des Berührungspunktes

$$\Sigma A_{ix}\, u_i'\, u_x = 0$$

oder

$$u_1 \Sigma A_{1x}\, u_x' + u_2 \Sigma A_{2x}\, u_x' + u_3 \Sigma A_{3x}\, u_x' + u_4 \Sigma A_{4x}\, u_x' = 0.$$

Die Koordinaten $(x_1 \ldots x_4)$ des Berührungspunktes müssen aber zu den Koefficienten in dieser Gleichung proportional sein; daher müssen die Gleichungen bestehen:

$$(11)\quad \begin{aligned} A_{11}u_1' + A_{12}u_2' + A_{13}u_3' + A_{14}u_4' &= \varrho x_1 \\ A_{21}u_1' + A_{22}u_2' + A_{23}u_3' + A_{24}u_4' &= \varrho x_2 \\ A_{31}u_1' + A_{32}u_2' + A_{33}u_3' + A_{34}u_4' &= \varrho x_3 \\ A_{41}u_1' + A_{42}u_2' + A_{43}u_3' + A_{44}u_4' &= \varrho x_4. \end{aligned}$$

Wenn die aus den Koefficienten gebildete Determinante (10) von null verschieden ist, so können wir die Gröfsen u_1', u_2', u_3', u_4' vermittelst ϱx_1, ϱx_2, ϱx_3, ϱx_4 ausdrücken. Setzen wir die Determinante (10) gleich A und den Koefficienten von A_{ik} in A jedesmal gleich A_{ik}, so erhalten wir:

$$(12)\quad \begin{aligned} Au_1' &= \varrho\,(A_{11}x_1 + A_{21}x_2 + A_{31}x_3 + A_{41}x_4) \\ Au_2' &= \varrho\,(A_{12}x_1 + A_{22}x_2 + A_{32}x_3 + A_{42}x_4) \\ Au_3' &= \varrho\,(A_{13}x_1 + A_{23}x_2 + A_{33}x_3 + A_{43}x_4) \\ Au_4' &= \varrho\,(A_{14}x_1 + A_{24}x_2 + A_{34}x_3 + A_{44}x_4). \end{aligned}$$

Jetzt fügen wir die Bedingung dafür hinzu, dafs der Punkt (x) in der Ebene (u') liegt; es ist dies die Gleichung:

$$(13)\quad x_1u_1' + x_2u_2' + x_3u_3' + x_4u_4' = 0.$$

Dadurch erhalten wir die Gleichung:

$$(14)\quad \Sigma A_{ik}x_ix_k = 0.$$

Es ist dies die Bedingung dafür, dafs der Punkt (x) der Berührungspunkt einer Tangentialebene der Fläche (3) ist, oder die Gleichung der Fläche in Punktkoordinaten.

Man kann auch die Gleichungen (11) und (13) als homogene lineare Gleichungen zwischen den Gröfsen u_1', u_2', u_3', u_4', $-\varrho$ betrachten. Dann ist die Bedingung für das Zusammenbestehen dieser fünf Gleichungen:

$$(15)\quad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & x_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & x_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & x_3 \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung ist nur äufserlich von der Gleichung (14) verschieden.

9. Wenn eine eigentliche Fläche zweiter Ordnung auf die Ebenen eines Polartetraeders bezogen ist, ihre Gleichung also die Gestalt hat:

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2 = 0,$$

so ist die Gleichung derselben Fläche in Ebenenkoordinaten:

$$\frac{u_1^2}{a_1} + \frac{u_2^2}{a_2} + \frac{u_3^2}{a_3} + \frac{u_4^2}{a_4} = 0.$$

Ebenso geht die Gleichung der Fläche zweiter Klasse:

$$A_1 u_1^2 + A_2 u_2^2 + A_3 u_3^2 + A_4 u_4^2 = 0$$

für die zugehörigen Punktkoordinaten über in

$$\frac{x_1^2}{A_1} + \frac{x_2^2}{A_2} + \frac{x_3^2}{A_3} + \frac{x_4^2}{A_4} = 0.$$

Auch hieraus geht hervor, dafs die Beziehung zwischen Pol und Polarebene unabhängig davon ist, ob man der Fläche die zweite Ordnung oder die zweite Klasse beilegt.

10. Die Theorie der konjugierten Polarebenen fügt zu den Sätzen über konjugierte Durchmesser die beiden folgenden hinzu:

Die Berührungspunkte der beiden Tangentialebenen, welche zu einer gegebenen Durchmesserebene parallel sind, liegen auf dem konjugierten Durchmesser.

Zwei einander schneidende Tangentialebenen liegen harmonisch zu den beiden durch ihre Schnittlinie gelegten Ebenen, von denen die eine durch den Mittelpunkt geht und die andere zu den konjugierten Durchmessern parallel ist.

Übungen:

1) Welche Bedingungen müssen zwischen den Koefficienten der Gleichung (1) bestehen,

a) falls die Ebene (1, 0, 0, 0) die Fläche berühren soll;

b) wenn die Ebenen (1, 0, 0, 0) und (0, 1, 0, 0) konjugierte Polarebenen der Fläche sein sollen;

c) wenn die Kanten O_1O_2 und O_3O_4 des Koordinatentetraeders die Fläche berühren sollen;

d) wenn die vier Ebenen des Koordinatentetraeders die Fläche berühren sollen;

e) wenn der Punkt O_1 Pol der Ebene $O_2O_3O_4$ sein soll;

f) wenn die Kanten O_1O_2 und O_3O_4 reciproke Polare der Fläche sein sollen;

g) wenn das Koordinatentetraeder ein Polartetraeder der Fläche sein soll?

2) Wenn die Gleichung einer eigentlichen Fläche zweiter Ordnung in Punktkoordinaten ist $\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa = 0$, und dieselbe Fläche in den zugehörigen Ebenenkoordinaten die Gleichung hat

$\Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota u_\varkappa = 0$, so weise man vermittelst Determinantensätze nach, dafs auch die aus den Koefficienten $A_{\iota\varkappa}$ gebildete Determinante von null verschieden ist.

3) Sobald man drei Tangentialebenen einer Fläche zweiter Ordnung und ihre Berührungspunkte kennt, kann man

a) zu einer Ebene den Pol finden,

b) einen Tangentialkegel der Fläche konstruieren,

c) einen in der Fläche gelegenen Kegelschnitt bestimmen.

d) Die drei angegebenen Resultate kann man in dem Satze zusammenfassen:

Alle Flächen zweiter Ordnung, welche drei Punkte gemeinschaftlich haben und in ihnen je von derselben Ebene berührt werden, werden von demselben Kegel längs desselben Kegelschnitts berührt.

4) a) Durch einen Tangentialkegel, seine Berührungsebene und eine weitere Tangentialebene ist eine Fläche zweiter Klasse eindeutig bestimmt.

b) Damit zwei Kegel dieselbe Fläche zweiter Klasse berühren, müssen sie zwei Tangentialebenen gemeinschaftlich haben.

c) Durch zwei Tangentialkegel, welche zwei Berührungsebenen gemeinsam haben, und eine weitere Berührungsebene ist eine Fläche zweiter Klasse bestimmt.

(Man vergleiche die Übungen 12) und 13) zu § 18 und übertrage auch die weiteren dort aufgestellten Sätze auf Flächen zweiter Klasse.)

5) Durch ein Polartetraeder und drei Tangentialebenen ist eine Fläche zweiter Klasse bestimmt.

6) a) Wieviel Tangentialebenen werden durch die Forderung vertreten, dafs eine Gerade auf einer Fläche zweiter Ordnung liegen soll?

b) Wieviel Tangentialebenen genügen zur Bestimmung einer Fläche zweiter Klasse, welche durch eine gerade Linie hindurchgehen soll?

c) Eine Fläche zweiter Klasse soll durch zwei windschiefe gerade Linien gehen; wieviel Tangentialebenen müssen aufserdem noch gegeben sein?

d) Wieviel Tangentialebenen sind zur Bestimmung einer Fläche

zweiter Klasse erforderlich, welche durch zwei gegebene, einander schneidende gerade Linien hindurchgehen soll?

7) a) Der Pol der Ebene (u') in Bezug auf die Fläche zweiter Klasse $\Phi(u_1 \ldots u_4) = 0$ hat die Gleichung $\Sigma u_\iota' \Phi'(u_\iota) = 0$ oder, was dasselbe ist, die Gleichung $\Sigma u_\iota \Phi'(u_\iota') = 0$.

b) Um die Fläche $\Phi(u_1 \ldots u_4) = 0$ in Punktkoordinaten darzustellen, mufs man die Gröfsen u_1', u_2', u_3', u_4' und ρ aus den Gleichungen eliminieren:

$$\Phi'(u_1') = \rho x_1,\ \Phi'(u_2') = \rho x_2,\ \Phi'(u_3') = \rho x_3,\ \Phi'(u_4') = \rho x_4$$

und

$$x_1 u_1' + x_2 u_2' + u_3 u_3' + x_4 u_4' = 0.$$

§ 21.

Die Grenzfläche zweiter Klasse.

1. Wenn die Koefficienten $A_{\iota\varkappa}$ in der Gleichung

$$(1) \quad \Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota u_\varkappa = 0$$

einer Fläche zweiter Klasse der Bedingung genügen:

$$(2) \quad \begin{vmatrix} A_{11} & \ldots & A_{14} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{41} & \ldots & A_{44} \end{vmatrix} = 0,$$

ohne dafs die Unterdeterminanten dritten Grades sämtlich verschwinden, so giebt es ein einziges Wertsystem $(\eta_1 \ldots \eta_4)$, für welches die Gleichung erfüllt wird:

$$(3) \quad \begin{aligned} A_{11}\eta_1 + A_{12}\eta_2 + A_{13}\eta_3 + A_{14}\eta_4 &= 0 \\ A_{21}\eta_1 + A_{22}\eta_2 + A_{23}\eta_3 + A_{24}\eta_4 &= 0 \\ A_{31}\eta_1 + A_{32}\eta_2 + A_{33}\eta_3 + A_{34}\eta_4 &= 0 \\ A_{41}\eta_1 + A_{42}\eta_2 + A_{43}\eta_3 + A_{44}\eta_4 &= 0. \end{aligned}$$

Wir nennen die Ebene $(\eta_1 \ldots \eta_4)$ die singuläre Ebene der Fläche. Da die Gleichung

$$(4) \quad \Sigma A_{\iota\varkappa} \eta_\iota u_\varkappa = 0$$

auch geschrieben werden kann:

$$u_1 \Sigma A_{1\varkappa}\eta_\varkappa + u_2 \Sigma A_{2\varkappa}\eta_\varkappa + u_3 \Sigma A_{3\varkappa}\eta_\varkappa + u_4 \Sigma A_{4\varkappa}\eta_\varkappa = 0,$$

so wird die Gleichung (4) für alle Wertsysteme (u) befriedigt, oder jede Ebene des Raumes ist konjugierte Polarebene zu der singulären Ebene.

Da die Gleichung (4) auch gültig bleibt, wenn man das Wertsystem $(u_1 \ldots u_4)$ durch $(\eta_1 \ldots \eta_4)$ ersetzt, so genügt die singuläre Ebene auch der Gleichung der Fläche.

2. Da bei unserer Annahme die vier Gleichungen (3) nur für ein einziges Wertsystem befriedigt werden, so hat jede von der singulären Ebene verschiedene Ebene (u') einen Pol, dessen Gleichung ist:

$$(5) \quad \Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota' u_\varkappa = 0.$$

Diese Gleichung wird befriedigt, wenn man $(u_1 \ldots u_4)$ durch $(\eta_1 \ldots \eta_4)$ ersetzt; also liegen die Pole zu allen Ebenen des Raumes in der singulären Ebene.

3. Ersetze ich in der Gleichung (5) die Ebene $(u_1' \ldots u_4')$ durch die Ebene $(u_1' + \lambda\eta_1 \ldots u_4' + \lambda\eta_4)$, so geht sie über in

$$\Sigma A_{\iota\varkappa} (u_\iota' + \lambda\eta_\iota) u_\varkappa = 0$$

oder in $$\Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota' u_\varkappa + \lambda \Sigma A_{\iota\varkappa} \eta_\iota u_\varkappa = 0.$$

Hier verschwindet der Koefficient von λ wegen der Gleichung (4); die vorstehende Gleichung geht also über in

$$\Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota u_\varkappa' = 0,$$

oder sie wird mit der Gleichung (5) identisch.

Giebt man dem Faktor λ alle möglichen Werte, so stellen die Koordinaten $(u_1 + \lambda\eta_1 \ldots u_4 + \lambda\eta_4)$ alle Ebenen dar, welche durch die Schnittlinien der beiden Ebenen $(u_1' \ldots u_4')$ und $(\eta_1 \ldots \eta_4)$ gehen. Alle diese Ebenen haben, wie wir bewiesen haben, denselben Pol. Es gilt also der Satz:

Alle Ebenen, von denen die singuläre Ebene in derselben geraden Linie geschnitten wird, haben denselben Pol.

4. Wenn speciell die Ebene (u') eine Tangentialebene der Fläche (1) ist, so ist ihr Pol durch die Gleichung (5) gegeben. Auch dieser Punkt liegt in der singulären Ebene, also auch in der Schnittlinie der Ebenen (u') und (η). Er ist aber auch Pol für jede Ebene, welche durch den Schnitt dieser beiden Ebenen gelegt werden kann, und da er in jeder solchen Ebene liegt, ihr Berührungspunkt. Wenn die Fläche (1), deren Koefficienten der Gleichung (2) genügen, von einer Ebene berührt wird, so wird sie in demselben Punkte von allen Ebenen berührt, welche durch die Schnittlinie der ersten Ebene mit der singulären Ebene gelegt werden können.

5. Als Punkte der Fläche müssen die Berührungspunkte ihrer Tangentialebenen angesehen werden. Alle diese Punkte liegen, wie überhaupt die Pole sämtlicher Ebenen, in der singulären Ebene. Aber nicht alle Punkte dieser Ebene haben die Eigenschaft, daſs sie in ihren Polarebenen liegen. Denn da die Fläche von der zweiten Klasse ist, gehen durch eine beliebige Gerade des Raumes zwei Tangentialebenen der Fläche. Jede dieser beiden Ebenen hat mit der singulären Ebene eine Gerade gemeinschaftlich; durch den Schnittpunkt der gewählten Geraden mit der singulären Ebene gehen also nur zwei gerade Linien, in denen ihr Berührungspunkt liegt. Diejenigen geraden Linien der singulären Ebene, in denen ihr Pol liegt, umhüllen also eine Kurve zweiter Klasse.

Diese Kurve kann aber weder ein Punktepaar noch ein Doppelpunkt sein, weil sonst schon in der Ebene Besonderheiten auftreten würden, die im Raume zu mehreren singulären Ebenen führen würden. Für den Fall eines Punktepaares gäbe es nämlich in der Ebene eine Gerade, die zu allen Geraden der Ebene konjugierte Polare wäre. Dann müſste nach 3. jede durch die erste Gerade gehende Ebene konjugierte Polarebene zu allen Ebenen des Raumes sein; es müſste also die Gleichung (3) mehrere von einander unabhängige Lösungen haben. Noch weniger kann die Kurve zweiter Klasse in einen Doppelpunkt ausarten. Sie ist also eine eigentliche Kurve zweiter Klasse, ein eigentlicher Kegelschnitt.

Hesse nennt die durch die Gleichung (1) unter der Bedingung (2) dargestellte Fläche eine Grenzfläche zweiter Klasse; wir können sie auch geradezu als Kegelschnitt bezeichnen.

6. Denken wir uns diesen Kegelschnitt gegeben, so können wir mit seiner Hilfe jeder Ebene ihren Pol und jedem Punkte seine Polarebenen leicht zuordnen. Um zu irgend einer Ebene den Pol zu konstruieren, suchen wir zu ihrer Schnittlinie mit der singulären Ebene den Pol in Bezug auf den Kegelschnitt. Umgekehrt muſs jeder Pol in der singulären Ebene liegen; zu einem beliebigen Punkte dieser Ebene konstruiert man die Polare in Bezug auf den Kegelschnitt; dann ist jede durch diese Gerade hindurchgehende Ebene Polarebene zu dem gegebenen Punkte.

Speciell ist jede Ebene, welche durch eine Tangente des

Kegelschnitts gelegt werden kann, als Tangentialebene des Kegelschnitts anzusehen.

7. Um die Gleichung der Grenzfläche in möglichst einfacher Form zu erhalten, denken wir uns die singuläre Ebene als eine der Koordinatenebenen genommen. Dafs alsdann die Gleichung auch vom zweiten Grade bleibt, braucht nicht nochmals erwähnt zu werden. Es sei also $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 0$, $\eta_3 = 0$, $\eta_4 = 1$. Damit unter dieser Annahme die Gleichungen (3) befriedigt werden, mufs $A_{14} = A_{24} = A_{34} = A_{44} = 0$ sein. Die Gleichung (1) enthält bei dieser Annahme nur die Variabeln u_1, u_2, u_3.

Noch einfacher wird die Gleichung, wenn wir die weitere Forderung hinzufügen, dafs je zwei der drei übrigen Koordinatenebenen konjugierte Polarebenen von einander sein sollen. Sollen die Ebenen (1, 0, 0, 0) und (0, 1, 0, 0) konjugierte Polarebenen sein, soll also die Gleichung (5) befriedigt werden für $u_1' = 1$, $u_2' = u_3' = u_4' = 0$ und $u_2 = 1$, $u_1 = u_3 = u_4 = 0$, so mufs $A_{12} = 0$ sein. Ebenso mufs $A_{13} = 0$ sein, damit die Ebenen (1, 0, 0, 0) und (0, 0, 1, 0) einander konjugiert sind; damit die Ebenen (0, 1, 0, 0) und (0, 0, 1, 0) konjugierte Polarebenen von einander sind, mufs $A_{23} = 0$ sein. Die Gleichung geht also über in

$$A_{11}u_1^2 + A_{22}u_2^2 + A_{33}u_3^2 = 0.$$

Von diesen drei Koefficienten darf aber keiner verschwinden, weil sonst auch alle Unterdeterminanten dritten Grades von (2) verschwinden würden.

Übungen:

1) a) Man forme die Gleichung (1), falls die Determinante (2) verschwindet, aber die Unterdeterminante $\Sigma \pm A_{11}A_{22}A_{33}$ von null verschieden ist, in eine Gleichung mit drei neuen Variabeln um, in welcher die sechs Koefficienten A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{12}, A_{13}, A_{23} ihre Werte beibehalten [Üb. 2) zu § 15].

b) Wie findet man hierbei die Koordinaten der Ebene, in welcher der dargestellte Kegelschnitt liegt?

2) a) Soll die Gleichung zweiten Grades in Ebenenkoordinaten $\Phi(u_1 \ldots u_4) = 0$ einen Kegelschnitt darstellen, so müssen die vier Gleichungen $\Phi'(u_1) = 0 \ldots \Phi'(u_4) = 0$ eine gemeinsame Lösung haben; mit andern Worten: Die vier Punkte $\Phi'(u_1) = 0 \ldots \Phi'(u_4) = 0$ müssen in einer Ebene liegen.

b) Sobald eine der vier Gleichungen $\Phi'(u_1)=0 \ldots \Phi'(u_4)=0$ identisch befriedigt wird, stellt die Gleichung $\Phi(u_1 \ldots u_4) = 0$ eine ebene Kurve dar.

3) Die Gleichung $\Phi(u_1 \ldots u_4) = 0$ mit verschwindender Determinante soll durch drei Quadrate dargestellt werden. Welche Ebene mufs dann notwendig dem Koordinaten-Tetraeder angehören? Welche Lage haben die drei in dieser Ebene liegenden Eckpunkte des Tetraeders? Was gilt für den gegenüberliegenden Eckpunkt des Tetraeders? Eine wievielfache Unendlichkeit bilden alle diese Tetraeder?

4) Die Schnittlinie der allgemeinen Fläche zweiter Klasse $\Phi(u_1 \ldots u_4) = 0$ mit der Ebene (u') hat die Gleichung:

$$4\,\Phi(u)\,\Phi(u') - [\Sigma u_\iota\,\Phi'(u_\iota')]^2 = 0,$$

oder was dasselbe ist:

$$4\,\Phi(u)\,\Phi(u') - [\Sigma u_\iota'\,\Phi'(u_\iota)]^2 = 0.$$

[Üb. 5) zu § 15.]

§ 22.

Das Punktepaar und der Doppelpunkt.

1. Die Koefficienten der Gleichung:

$$(1) \qquad \Sigma A_{\iota\varkappa}\,u_\iota\,u_\varkappa = 0$$

sollen die Eigenschaft haben, dafs die sämtlichen Unterdeterminanten dritten Grades der Determinante

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} A_{11} & \ldots & A_{14} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{41} & \ldots & A_{44} \end{vmatrix}$$

verschwinden, ohne dafs alle Unterdeterminanten zweiten Grades null sind. In diesem Falle haben die Gleichungen

$$(3) \qquad \begin{aligned} A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + A_{13}u_3 + A_{14}u_4 &= 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ A_{41}u_1 + A_{42}u_2 + A_{43}u_3 + A_{44}u_4 &= 0 \end{aligned}$$

zwei von einander unabhängige und damit unendlich viele Lösungen. Sind $(\eta_1 \ldots \eta_4)$ und $(\eta_1' \ldots \eta_4')$ zwei von einander unabhängige Lösungen, so ist auch $(\eta_1 + \lambda\eta_1' \ldots \eta_4 + \lambda\eta_4')$ eine Lösung. Den Gleichungen (3) genügen also die Koordinaten aller Ebenen, welche durch eine gewisse gerade Linie, die singuläre Linie, gehen. Alle durch diese Gerade gehenden Ebenen sind singuläre

Ebenen in dem Sinne, daſs zu jeder von ihnen alle Ebenen des Raumes konjugierte Polarebenen sind.

2. Eine jede Ebene (u'), welche nicht durch die singuläre Linie geht, hat einen bestimmten Pol:

$$(4) \quad \Sigma A_{\iota\varkappa}\, u_\iota\, u_\varkappa' = 0.$$

Da diese Gleichung befriedigt wird, wenn man $(u_1 \ldots u_4)$ durch $(\eta_1 + \lambda\eta_1' \ldots \eta_4 + \lambda\eta_4')$ ersetzt, so liegt der Pol auf der singulären Geraden.

Wird die Ebene (u') durch eine Ebene

$$(u_1 + \mu\eta_1 + \nu\eta_1' \ldots u_4 + \mu\eta_4 + \nu\eta_4')$$

ersetzt, also durch eine beliebige Ebene, welche durch den Schnittpunkt der gegebenen Ebene (u') mit der singulären Geraden hindurchgeht, so wird die Gleichung des Pols:

$$\Sigma A_{\iota\varkappa}\, u_\iota\, (u_\varkappa + \mu\eta_\varkappa + \nu\eta_\varkappa') = 0.$$

Da aber $\Sigma A_{\iota\varkappa}\, u_\iota\, \eta_\varkappa = 0$ und $\Sigma A_{\iota\varkappa}\, u_\iota\, \eta_\varkappa' = 0$ ist, so wird die Gleichung mit der Gleichung (4) identisch; die neue Ebene hat somit denselben Pol. Daraus folgt der Satz:

Die Pole zu allen Ebenen, die nicht durch die singuläre Gerade hindurchgehen, liegen in der singulären Geraden. Alle Ebenen, welche die singuläre Gerade in demselben Punkte schneiden, haben auch denselben Pol.

3. Wenn eine Ebene der Gleichung (1) genügt, so ist ihr Schnittpunkt mit der singulären Geraden ihr Pol; es genügen der Gleichung (1) auch alle Ebenen, welche mit dieser Ebene in demselben Punkte der singulären Geraden zusammentreffen. Nun gehen durch jede Gerade, welche mit der singulären Linie keinen Punkt gemeinschaftlich hat, zwei Ebenen, welche der Gleichung (1) genügen. Jede von ihnen trifft die singuläre Gerade in einem Punkte; die Gleichung (1) wird also durch alle Ebenen befriedigt, welche durch einen dieser beiden Punkte gelegt werden können. Da zudem weitere Ebenen der Gleichung (1) nicht genügen, so stellt sie ein Punktepaar dar. Man zeigt in der That leicht, daſs die linke Seite der Gleichung (1) in das Produkt zweier linearer Ausdrücke zerlegbar ist.

4. Um die Gleichung (1) auf eine möglichst einfache Form zu bringen, legen wir zwei Koordinatenebenen durch die singuläre Gerade und wählen die beiden andern so, daſs sie konjugierte Polarebenen sind. Es mögen demnach die Ebenen (0, 0, 1, 0)

und (0, 0, 0, 1) durch die singuläre Linie gehen und die Ebenen (1, 0, 0, 0) und (0, 1, 0, 0) zu einander konjugiert sein. Dann müssen die Gleichungen (3) befriedigt werden, wenn man $u_1 = u_2 = 0$ setzt und u_3 und u_4 beliebige Werte beilegt. Demnach sind die Koefficienten A_{13}, A_{23}, A_{33}, A_{14}, A_{24}, A_{34}, A_{44} gleich null. Weil die beiden andern Koordinatenebenen zu einander konjugiert sind, mufs auch $A_{12} = 0$ sein. Demnach ist die Gleichung:

$$A_{11}u_1^2 + A_{22}u_2^2 = 0,$$

wo keiner der Koefficienten A_{11} und A_{22} verschwinden darf.

5. Wenn endlich auch alle Unterdeterminanten zweiten Grades der Determinante (2) verschwinden, so kommen die vier Gleichungen (3) auf eine einzige hinaus. Alle Ebenen, welche durch einen Punkt, den singulären Punkt, gehen, sind singuläre Ebenen. Dieser Punkt ist der Pol zu allen Ebenen des Raumes. Um die Form der Gleichung recht einfach zu machen, wählen wir drei Koordinatenebenen, die Ebenen II, III, IV so, dafs sie durch den singulären Punkt gehen. Da hiernach die Ebene (0, 0, 0, 1) eine singuläre Ebene sein soll, also für $u_1 = u_2 = u_3 = 0$, $u_4 = 1$ die Gleichungen (3) befriedigt werden sollen, müssen $A_{14} = A_{24} = A_{34} = A_{44} = 0$ sein. Ebenso müssen die Koefficienten verschwinden, bei denen die Marke 3 vorkommt, weil die Ebene (0, 0, 1, 0) singuläre Ebene sein soll, und endlich darf kein Koefficient von nichtverschwindendem Werte die Marke 2 haben, weil die Gleichungen (3) für $u_1 = u_3 = u_4 = 0$, $u_2 = 1$ bestehen sollen. Somit ist die Gleichung

$$u_1^2 = 0.$$

Die Gleichung (1) stellt unter der gemachten Annahme einen doppelt zu zählenden Punkt, einen Doppelpunkt dar; ihre linke Seite ist das Quadrat eines homogenen linearen Ausdrucks.

Übungen:

1) a) Wie findet man in Bezug auf ein gegebenes Punktepaar zu einer festen Ebene alle konjugierten Polarebenen?

b) Man charakterisiere die auf der Verbindungslinie der Punkte des Paares erzeugte Involution.

2) a) Wenn die sämtlichen Unterdeterminanten dritten Grades der Determinante (3) verschwinden, aber $A_{11}A_{22} - A_{12}^2$ von null

verschieden ist, so soll man neue Koordinaten in der Weise einführen, dafs bei ihrer Benutzung in der Gleichung nur die Koefficienten A_{11}, A_{12}, A_{22} vorkommen und diese ihre Werte beibehalten.

b) Wie findet man hierbei die Verbindungslinie der Punkte des Paares?

c) Jenachdem unter den in a) gemachten Voraussetzungen die Unterdeterminante $A_{11}A_{22} - A_{12}^2$ einen positiven oder negativen Wert hat, ist das Punktepaar imaginär oder reell.

3) a) Man charakterisiere die sämtlichen Koordinatentetraeder, bei deren Benutzung ein gegebenes Punktepaar durch zwei Quadrate dargestellt wird.

b) Welchen Grad von Unendlichkeit darf man der Gesamtheit dieser Tetraeder beilegen?

4) Das Punktepaar, in welchem die Schnittlinie der Ebenen (u') und (u'') die Fläche $\Phi(u_1 \ldots u_4) = 0$ schneidet, kann in der Form dargestellt werden:

$$\{[\Sigma u_\iota' \Phi'(u_\iota'')^2 - 4\Phi(u')\Phi(u'')\}\Phi(u)$$
$$+ \Phi(u'')[\Sigma u_\iota \Phi'(u_\iota')]^2 - \Sigma u_\iota' \Phi(u_\iota'') \cdot \Sigma u_\iota \Phi(u_\iota') \cdot \Sigma u_\iota \Phi(u_\iota'')$$
$$+ \Phi(u')[\Sigma u_\iota \Phi'(u_\iota'')]^2 = 0.$$

(Man bilde die Ableitungen der linken Seite nach den einzelnen Variabeln und weise nach, dafs diese sowohl für (u') wie für (u'') verschwinden.)

§ 23.

Einteilung der Flächen zweiter Klasse.

1. Wenn die aus den Koefficienten in der Gleichung einer Fläche zweiter Klasse gebildete Determinante von null verschieden ist, so ist die Fläche auch von der zweiten Ordnung. Wir erhalten in diesem Falle diejenigen Arten, die wir oben angegeben haben.

2. Wenn die Determinante verschwindet, ohne dafs die ersten Unterdeterminanten sämtlich gleich null sind, so gehören die Punkte einem Kegelschnitt an; wir haben also nur noch zu unterscheiden, ob der Kegelschnitt reell oder imaginär ist.

3. Die Fläche zweiter Klasse wird ein Punktepaar, wenn die ersten Unterdeterminanten der aus den Koefficienten gebildeten

Determinante sämtlich verschwinden, aber sich unter den zweiten Unterdeterminanten mindestens eine von null verschiedene befindet. Zwar ist die singuläre Linie immer reell; die Punkte des Paares können aber reell oder imaginär sein.

4. Wenn auch noch alle Unterdeterminanten zweiten Grades verschwinden, so stellt die Gleichung einen Doppelpunkt dar.

5. Die Lage zum Unendlichfernen giebt noch zu weiteren Einteilungen Veranlassung. Was zunächst die imaginäre Grenzfläche betrifft, so haben wir zu unterscheiden, ob sie in einer eigentlichen oder der unendlichfernen Ebene liegt. In beiden Fällen sind die Punkte und die Tangentialebenen imaginär; dagegen wird jedesmal einer Ebene ein Bündel von Ebenen zugeordnet. Dieser Bündel hat im ersten Falle einen eigentlichen Punkt zum Scheitel. Im zweiten Falle wird jeder Ebene eine bestimmte Richtung zugeordnet; die Polarebenen sind jedesmal einer gewissen geraden Linie parallel.

6. Bei einer reellen Grenzfläche sind vier Fälle zu unterscheiden:

a) der Kegelschnitt hat mit der unendlichfernen Ebene keinen Punkt gemeinschaftlich;

b) er berührt die unendlichferne Ebene;

c) er schneidet die unendlichferne Ebene;

d) er liegt ganz in der unendlichfernen Ebene.

Im ersten Falle ist der Kegelschnitt eine Ellipse, im zweiten eine Parabel, im dritten eine Hyperbel. Im vierten Falle genügen der Gleichung der Fläche alle Ebenen, welche zu den Tangentialebenen eines Kegels parallel sind; jede Ebene bestimmt eine gewisse Richtung derartig, dafs alle Ebenen, welche eine in dieser Richtung gezogene Gerade enthalten, Polarebenen zu der gegebenen Ebene sind.

7. Bei dem imaginären Punktepaare ist zu unterscheiden, ob die Verbindungslinie im Endlichen oder im Unendlichfernen liegt. Im letzteren Falle giebt es eine Schar paralleler Ebenen, welche sämtlich singuläre Ebenen sind. In einer jeden solchen Ebene werden die durch einen beliebigen Punkt P gehenden Geraden einander involutorisch zugeordnet; um die Polarebenen zu einer gegebenen Ebene zu erhalten, sucht man zu ihr die durch P gehende parallele Gerade und bestimmt die entsprechende Linie der Involution;

dann sind alle Ebenen konjugierte Polarebenen, welche zu der letzten Geraden parallel sind.

8. Was das reelle Punktepaar betrifft, so können entweder beide eigentliche Punkte sein, oder es kann einer oder es können beide im Unendlichfernen liegen. Im zweiten Falle entsprechen einander auf der singulären Geraden je zwei Punkte, welche von dem eigentlichen Punkte gleichen Abstand haben; je zwei Ebenen sind also konjugierte Polarebenen, wenn sie die singuläre Gerade in gleichem Abstande von jenem Punkte treffen. Wenn dagegen die beiden Punkte unendlichfern liegen, so sind wieder alle Ebenen einer gewissen Parallelschar singuläre Ebenen; in jeder solchen Ebene wird unter den Geraden eines beliebigen Büschels eine Involution mit reellen Hauptstrahlen bestimmt; wenn a und a' entsprechende Strahlen in dieser Involution sind und wenn eine Ebene A eine zu a, die Ebene A' eine zu a' parallele Gerade enthält, so sind jedesmal die Ebenen A und A' konjugierte Polarebenen.

9. Für den Doppelpunkt haben wir nur zu unterscheiden, ob er im Endlichen oder im Unendlichfernen liegt.

Übungen:

1) Man gebe die verschiedenen Arten von Tangentialkegeln an, welche sich von den verschiedenen Punkten des Raumes aus an die folgenden Flächen zweiter Klasse legen lassen:

a) an eine eigentliche imaginäre Fläche,
b) an eine reelle ungeradlinige Fläche,
c) an eine geradlinige Fläche,
d) an einen imaginären Kegelschnitt,
e) an einen reellen Kegelschnitt,
f) an ein imaginäres Punktepaar,
g) an ein reelles Punktepaar,
h) an einen Doppelpunkt.

Man zeige, dafs im Falle a) alle Punkte des Raumes dieselbe Eigenschaft haben, während für b), je nach der Wahl des Punktes, drei verschiedene Arten von Kegeln erhalten werden. Man achte darauf, welche besondern Kegelarten den später angegebenen Flächen eigentümlich sind und welche allgemeinen Arten dabei wegfallen. Endlich zeige man, dafs in den Flächen g) und h) bei ganz speciellen Lagen des Punktes die Gleichung des Kegels

identisch verschwindet. Wie lautet die entsprechende Aufgabe für Flächen zweiter Ordnung?

2) a) Wenn eine Grenzfläche zweiter Klasse ganz in der unendlichfernen Ebene liegt, so sind alle konjugierten Polarebenen zu einer gegebenen Ebene einer festen Geraden parallel.

b) Speciell mufs jede Ebene als Tangentialebene aufgefafst werden, für welche die konjugierten Polarebenen einer in jener Ebene gelegenen Geraden parallel sind.

c) Alle zu einer gegebenen Tangentialebene parallelen Ebenen berühren die Kurve ebenfalls.

d) Wie kann man reelle und imaginäre unendlichferne Kegelschnitte unterscheiden?

3) a) Ein Punktepaar liege im Unendlichfernen. Dann giebt es stets eine feste Stellung von der Art, dafs jede zu ihr parallele Ebene zu allen Ebenen des Raumes konjugierte Polarebene ist.

b) Durch diese Stellung und zwei Paare konjugierter Ebenen ist das Punktepaar bestimmt. Wie kann man alsdann zu jeder der gegebenen Ebenen alle konjugierten Polarebenen finden? Wie konstruiert man zu jeder Ebene die sämtlichen Polarebenen? Man suche die Richtungen, in denen die Punkte des Paares liegen. Wann sind diese Punkte reell, wann imaginär?

4) a) Ein Punktepaar bestehe aus einem eigentlichen und einem uneigentlichen Punkte, wird also durch einen Punkt α und eine von ihm ausgehende Gerade a vertreten.

b) Zu jeder durch die Gerade a hindurchgehenden Ebene sind alle Ebenen des Raumes konjugierte Polarebenen.

c) Zu einer zur Geraden a parallelen Ebene sind alle Ebenen konjugiert, welche eine Gerade von der Richtung von a enthalten.

d) Um zu einer beliebigen Ebene die Polarebenen zu konstruieren, suche man ihren Schnittpunkt π mit a und trage auf dieser Geraden die Strecke $\alpha\varrho = \alpha\pi$ ab; dann ist ϱ der Pol der gegebenen Ebene.

5) a) Die Polarebenen zu allen Punkten einer Fläche zweiter Ordnung in Bezug auf eine zweite solche Fläche umhüllen eine Fläche zweiter Klasse.

b) Wenn die erste Fläche imaginär ist, so ist es auch die letzte; wenn die erste ungeradlinig ist, enthält auch die dritte keine geraden Linien u. s. w.

c) Welches Gebilde entspricht hierbei einem auf der ersten Fläche gelegenen Kegelschnitte?

d) Welches Gebilde wird einer beliebigen Kurve zugeordnet, die auf der ersten Fläche liegt?

e) Man nehme speciell an, die zweite Fläche habe die Gleichung $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$. Wie lautet die Gleichung der dritten Fläche, wenn die der ersten Fläche ist $\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$?

f) Die erste Fläche sei ein Kegel; was gilt dann von der dritten?

g) Warum ist es angebracht, wie eben immer geschehen, vorauszusetzen, daſs die zweite Fläche eine eigentliche Fläche ist?

6) a) Die Schnittlinien entsprechender Ebenen in zwei projektiv auf einander bezogenen Ebenenbüscheln bilden die eine Regelschar einer Fläche zweiter Ordnung.

(Man ordne jeder Ebene des Büschels $A + \lambda B = 0$ diejenige Ebene des Büschels $C + \lambda D = 0$ zu, für welche der Parameter λ denselben Wert hat. Für den Beweis vergleiche man I § 28, S. 184. Man übertrage auch die übrigen dort angegebenen Sätze.)

b) Der gefundenen Fläche gehören auch die Axen der beiden Büschel an.

c) Je zwei der zweiten Regelschar angehörende Gerade können als Axen von Ebenenbüscheln genommen werden, durch welche die Fläche erzeugt wird.

d) Umgekehrt kann jede geradlinige Fläche zweiter Ordnung als Erzeugnis projektiver Ebenenbüschel angesehen werden.

e) Durch drei windschiefe Gerade läſst sich eine einzige Fläche zweiter Ordnung legen.

(Die Geraden seien l_1, l_2, l_3; man wähle in l_3 einen Punkt α und lege durch ihn die Gerade a, welche l_1 und l_2 schneidet; ebenso lasse man von einem Punkte β von l_3 die Gerade b ausgehen, von welcher die Geraden l_1 und l_2 geschnitten werden. In den Büscheln, deren Träger a und b sind, lasse man die Ebenen (al_1) und (bl_1), (al_2) und (bl_2), (al_3) und (bl_3) einander entsprechen und bestimme dadurch die projektive Zuordnung der Ebenenbüschel.)

f) Sobald eine Ebene des einen Büschels der zu ihr zugeordneten des andern parallel ist, wird durch die projektive Zuordnung ein Paraboloid erzeugt.

g) Vier derselben Schar angehörende Geraden einer Fläche zweiter Ordnung bestimmen auf jeder Geraden der andern Schar dasselbe Doppelverhältnis.

(Werden die vier Erzeugenden l_1, l_2, l_3, l_4 der ersten Schar von einer Erzeugenden der andern Schar in den Punkten π_1, π_2, π_3, π_4 geschnitten, so hat das Doppelverhältnis $(\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4)$ denselben Wert, welche Erzeugende g auch genommen wird.)

h) Alle auf einem hyperbolischen Paraboloid gelegenen und von zwei festen Erzeugenden begrenzten Strecken werden durch dieselbe dritte Erzeugende nach demselben Verhältnisse geschnitten.

(Man wähle einen der vier in g) benutzten Strahlen unendlichfern.)

i) Die Mitten aller in zwei festen windschiefen Geraden begrenzten Strecken, welche zu einer gegebenen Ebene parallel sind, liegen in einer geraden Linie.

k) In zwei Ebenenbüscheln, deren Träger windschief zu einander sind, werden diejenigen Ebenen einander zugeordnet, welche konjugierte Polarebenen in Bezug auf eine feste Fläche zweiter Ordnung sind. Welches ist der geometrische Ort der Schnittlinie entsprechender Ebenen?

l) Wann wird die Aufgabe k) unlösbar?

7) Auch durch die Verbindungslinien entsprechender Punkte in zwei projektiven Punktreihen wird eine Fläche zweiter Ordnung erzeugt. Man beweise dies nach der in 6) angegebenen Methode und übertrage die dort angegebenen Lehrsätze.

8) Läfst man bei der in 6) angegebenen Erzeugung der Ebene $x_1 + \lambda x_2 = 0$ die Ebene $x_3 + \lambda x_4 = 0$ entsprechen, so wird die Gleichung der Fläche $x_1x_4 - x_2x_3 = 0$. Die sechs Ebenen $x_1 = 0$, $x_1 = x_2$, $x_3 = x_4$, $x_4 = 0$, $x_4 = x_2$, $x_1 = x_3$ sind Tangentialebenen der Fläche, und je zwei auf einander folgende haben eine Erzeugende mit der Fläche gemeinschaftlich. Die drei Linien, in denen sich je zwei gegenüberliegende Ebenen dieses Sechsflachs schneiden, liegen in der Ebene $x_1 = x_4$. Dieselbe Koordinatenbestimmung kann man für jedes der Fläche zugleich um- und eingeschriebene Sechsflach machen; daher gilt der Satz allgemein.

Von den angegebenen sechs Geraden 1, 2, 3, 4, 5, 6 gehören 1, 3, 5 der einen, 2, 4, 6 der andern Kegelschar an. Daher kann man aus ihnen acht verschiedene Sechsflache bilden.

Speciell liegen die Durchschnittspunkte α) der ungeraden Seitenebenen, β) der geraden Seitenebenen, γ) der Ebenen, welche durch die gegenüberliegenden Kantenpaare gehen, in einer Geraden a. Ebenso schneiden sich die Ebenen α) durch die drei ungeraden Eckpunkte, β) durch die geraden Eckpunkte, γ) durch die drei Schnittpunkte gegenüberliegender Kanten in einer zweiten geraden Linie b. Die Geraden a und b sind konjugierte Polare von einander.

9) Im engen Anschluſs an die Übung 4) zu § 21 des ersten Teiles (I S. 128, 129) beweise man folgende Sätze:

Die Gleichung $\Sigma a_{ix}\, \alpha_{ix} = 0$ stellt eine feste Beziehung zwischen den Flächen $\Sigma a_{ix}\, x_i\, x_x = 0$ und $\Sigma \alpha_{ix}\, u_i\, u_x = 0$ dar. Wenn diese beiden Flächen eigentliche Flächen sind, so sagt die Gleichung aus, daſs auf der ersten Fläche die Eckpunkte von unendlichvielen Polartetraedern der zweiten liegen und der zweiten unendlichviele Polartetraeder der ersten umgeschrieben sind.

Man gebe die speciellen Fälle an, in welche dieser Satz übergeht, wenn eine der beiden Flächen eine uneigentliche Fläche wird. Namentlich beweise man den Satz:

Wenn die Bedingungsgleichung besteht und die Gleichung in Ebenenkoordinaten ein Punktepaar darstellt, so sind seine Punkte konjugierte Pole für die erste Fläche; und wenn die zweite Fläche in einen Doppelpunkt übergeht, so liegt derselbe auf der ersten Fläche.

Ferner gilt der Satz:

Wenn zwei Flächen zweiter Ordnung beliebig gegeben sind, so ist im allgemeinen weder der ersten ein Polartetraeder der zweiten eingeschrieben, noch der zweiten ein Polartetraeder der ersten umgeschrieben; sobald aber die zweite Fläche von einem einzigen Polartetraeder der ersten berührt wird, sind ihr dreifach unendlichviele Polartetraeder der ersten Fläche umgeschrieben; zugleich liegen aber auch die Eckpunkte von dreifach unendlichvielen Polartetraedern der zweiten Fläche auf der ersten.

10) Abbildung einer Fläche zweiter Ordnung auf eine Ebene.

Man wähle einen Punkt S der Fläche zum Projektionscentrum, ziehe die Gerade SP nach einem beliebigen Punkte P der Fläche und ordne dem Punkte P den Schnittpunkt P′ der Geraden SP mit der Ebene zu. Dabei entsprechen die Punkte P und P′

einander im allgemeinen eindeutig; nur dem Punkte S der Fläche entsprechen alle Punkte auf der Schnittlinie der gegebenen Ebene mit der Tangentialebene in S, und wofern die Fläche geradlinig ist, werden die beiden von S ausgehenden Geraden der Fläche je durch einen einzigen Punkt der Ebene abgebildet.

Es sei $F(x_1 \ldots x_4) = 0$ die Gleichung der Fläche; (x^0) sei der Punkt S; (x'), (x''), (x''') seien drei beliebige Punkte der Ebene. Die Koordinaten (y_α) eines beliebigen Punktes P' der Ebene sind den Gröfsen

$$\xi_1 x_\alpha' + \xi_2 x_\alpha'' + \xi_3 x_\alpha'''$$

proportional. Ebenso darf man die Gröfsen $\lambda x_\alpha^0 + y_\alpha$ als Koordinaten eines beliebigen Punktes P der Geraden SP' auffassen. Da aber der Punkt S auf der Fläche liegt, nimmt die Bedingung dafür, dafs der Punkt P der Fläche angehört, die Gestalt an:

$$2\lambda \Sigma x_\iota^0 F'(y_\iota) + F(y_1 \ldots y_4) = 0.$$

Indem wir den hieraus folgenden Wert von λ in die Koordinaten des Punktes P einsetzen, folgen die Gleichungen:

$$\varrho x_\alpha = -x_\alpha^0 F(y_1 \ldots y_4) + 2y_\alpha \Sigma x_\iota^0 F'(y_\iota).$$

Hier stellen $y_1 \ldots y_4$ lineare Formen von ξ_1, ξ_2, ξ_3 dar. Demnach sind die Koordinaten der Fläche proportional zu homogenen quadratischen Ausdrücken in ξ_1, ξ_2, ξ_3. Nun giebt es zwei reelle oder imaginäre Wertsysteme ξ_1, ξ_2, ξ_3, für welche die beiden Gleichungen $F(y_1 \ldots y_4) = 0$ und $\Sigma x_\iota^0 F'(y_\iota) = 0$ befriedigt werden. Setzt man also einen Bildpunkt (ξ) als gemeinschaftlichen Punkt der Fläche, ihrer Tangentialebene in S und der Bildebene voraus, so werden die Ausdrücke für $x_1 \ldots x_4$ sämtlich gleich null. Man weise nach, dafs jedem solchen Punkte eine Erzeugende der Fläche entspricht.

Umgekehrt vermitteln die vier quadratischen Formen Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 von ξ_1, ξ_2, ξ_3, welche für zwei bestimmte Wertsysteme der ξ_1, ξ_2, ξ_3 sämtlich null werden, durch die Gleichungen:

$$\varrho x_\alpha = \Phi_\alpha(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

eine Abbildung einer Fläche zweiter Ordnung auf eine Ebene. Will man nämlich die Punkte der Fläche finden, welche auf der Schnittlinie der beiden Ebenen liegen: $a_1 x_1 + \ldots + a_4 x_4 = 0$, $b_1 x_1 + \ldots + b_4 x_4 = 0$, so hat man die Wurzeln der Gleichungen $a_1 \Phi_1 + \ldots + a_4 \Phi_4 = 0$, $b_1 \Phi_1 + \ldots b_4 \Phi_4 = 0$ aufzusuchen und von

den gemeinschaftlichen Wurzeln der Gleichungen $\Phi_1 = 0 \ldots \Phi_4 = 0$ abzusehen.

Zur Übung lege man die Abbildungen zu Grunde:

a) $x_1 = 2\xi_1\xi_3$, $x_2 = 2\xi_2\xi_3$, $x_3 = \xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2$,
$x_4 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$;

b) $x_1 = \xi_1^2$, $x_2 = \xi_1\xi_2$, $x_3 = \xi_1\xi_3$, $x_4 = \xi_2\xi_3$.

(Speciell betrachte man x, y, z als rechtwinklige Koordinaten im Raume, u, v als rechtwinklige Koordinaten in der Ebene, setze

$$x = \frac{2u}{1+u^2+v^2},\quad y = \frac{2v}{1+u^2+v^2},\quad z = \frac{1-u^2-v^2}{1+u^2+v^2},$$

und untersuche die hierdurch vermittelte Abbildung der Kugel auf die Ebene.)

Dabei beachte man folgendes:

α) Jeder Geraden der Ebene entspricht auf der Fläche ein Kegelschnitt; wenn die Gerade durch einen der singulären Punkte der Ebene geht, so entspricht ihr eine Gerade der Fläche; der Verbindungslinie der singulären Punkte entspricht ein einziger Punkt der Fläche.

β) Jedem Kegelschnitt in der Ebene entspricht auf der Fläche eine Raumkurve vierter Ordnung; diese geht in eine Raumkurve dritter Ordnung über, falls der Kegelschnitt durch einen singulären Punkt geht, und in eine Kurve zweiter Ordnung, falls er die beiden singulären Punkte enthält.

11) Aufzählung der Flächen, welche vermittelst quadratischer Gleichungen auf die Ebene abgebildet werden können.

Wir setzen allgemein:

$$x_\alpha = \Phi_\alpha(\xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

wo wir unter x_1, x_2, x_3, x_4 räumliche Tetraeder-Koordinaten, unter ξ_1, ξ_2, ξ_3 ebene Dreiecks-Koordinaten verstehen und wo Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 homogene Funktionen zweiten Grades in ξ_1, ξ_2, ξ_3 sind. Die Schnittkurve einer beliebigen Ebene $\Sigma a_\iota x_\iota = 0$ wird durch die Kurve $\Sigma a_\iota \Phi_\iota = 0$ abgebildet. Es kommt daher für die abgebildete Fläche im wesentlichen auf das dreifach unendliche System von Kegelschnitten an, welches durch die vier Kurven

$$\Phi_1 = 0,\ \Phi_2 = 0,\ \Phi_3 = 0,\ \Phi_4 = 0$$

bestimmt wird. Dies System steht in enger Beziehung zu einer Schar von Kurven zweiter Klasse, wie man aus der Übung 8)

zu I § 24 (S. 163) ersieht. Somit wird die abgebildete Fläche durch diese Kegelschnittsschar bestimmt.

Sind jetzt u_1, u_2, u_3 ebene Linienkoordinaten, so sind folgende Fälle zu unterscheiden:

a) $u_1^2 - \alpha u_3^2 = 0$, $u_2^2 - \beta u_3^2 = 0$,
b) $u_1^2 - \alpha u_2^2 = 0$, $u_2 u_3 = 0$,
c) $u_2^2 - 2u_1 u_3 = 0$, $u_1 u_2 = 0$,
d) $u_1^2 = 0$, $u_2^2 - \alpha u_3^2 = 0$,
e) $u_1^2 = 0$, $2u_1 u_2 - u_3^2 = 0$,
f) $u_1^2 = 0$, $u_2^2 = 0$,
g) $u_1^2 = 0$, $u_1 u_2 = 0$.

(Aus a) geht für den Fall, daſs die zu Grunde gelegten Variabeln konjugiert komplexe Werte haben, die Form hervor:

$$u_1^2 - u_2^2 + u_3^2 = 0, \quad u_1 u_2 = 0.$$

Ebenso muſs man unter f) auch die Gleichungen betrachten: $u_1^2 - u_2^2 = 0$, $u_1 u_2 = 0$.)

Dem Falle a) entspricht die Abbildung:

$$x_1 = \alpha\xi_1^2 + \beta\xi_2^2 + \gamma\xi_3^2, \quad x_2 = \xi_1\xi_2, \quad x_3 = \xi_1\xi_3, \quad x_4 = \xi_2\xi_3.$$

Ebenso führt die Kurvenschar b) auf die Darstellung:

$$x_1 = \alpha\xi_1^2 + \xi_2^2, \quad x_2 = \xi_3^2, \quad x_3 = \xi_1\xi_2, \quad x_4 = \xi_1\xi_3,$$

und die Schar c) auf die Abbildung:

$$x_1 = \xi_2^2 + \xi_1\xi_3, \quad x_2 = \xi_1^2, \quad x_3 = \xi_3^2, \quad x_4 = \xi_2\xi_3.$$

Man gebe für die übrigen Fälle die entsprechende Abbildung an und untersuche die auf diese Weise erhaltenen Flächen. (Diejenigen Flächen vierter Ordnung, welche durch Gleichungen zweiten Grades auf die Ebene abgebildet werden können, werden als Steinersche Flächen bezeichnet.)

§ 24.

Der Flächenbüschel zweiter Ordnung.

1. Wenn die Gleichungen

$$(1) \quad F(x_1 \ldots x_4) = 0, \quad \Phi(x_1 \ldots x_4) = 0$$

zwei Flächen n^{ter} Ordnung darstellen, so sagen wir, alle Flächen, deren Gleichung ist:

$$(2) \quad F + \lambda\Phi = 0,$$

gehörten dem durch die Gleichungen (1) bestimmten Flächenbüschel n^{ter} Ordnung an.

Statt von den beiden Flächen (1) auszugehen, dürfen wir den Büschel auch durch irgend zwei Flächen bestimmen, die demselben angehören, also bei ungleichen Marken λ_1 und λ_2 auch durch die beiden Flächen:

$$F + \lambda_1 \Phi = 0, \quad F + \lambda_2 \Phi = 0.$$

Die Flächen des Büschels (2) gehen durch die Schnittlinie der beiden Flächen (1) hindurch. Denn sobald die beiden Gleichungen (1) für irgend einen Punkt (x) erfüllt sind, mufs auch bei beliebigem Werte von λ die Gleichung (2) für denselben Punkt befriedigt werden.

Dagegen geht durch jeden Punkt des Raumes, der nicht der Schnittlinie angehört, eine einzige Fläche des Büschels hindurch. Für einen Punkt (x'), der nicht in der Schnittlinie liegt, können $F(x')$ und $\Phi(x')$ nicht beide verschwinden; also giebt es einen einzigen Wert λ, welcher der Gleichung genügt:

$$F(x') + \lambda \Phi(x') = 0.$$

Jede Tangente der Schnittlinie ist auch Tangente an die Flächen des Büschels. Um das zu erkennen, lassen wir eine Gerade sich so bewegen, dafs sie durch einen festen Punkt und einen veränderlichen Punkt der Schnittlinie geht; die Grenzlage, welche diese Sekante erhält, wenn der zweite Punkt dem ersten unbegrenzt nahe kommt, ist die Tangente der Kurve. Da aber sowohl der feste wie der bewegliche Punkt auf jeder Fläche des Büschels liegt, so führt die vorgenommene Operation auch auf eine Tangente der Fläche.

Hiernach mufs die Tangentialebene für jede Fläche des Büschels durch die Tangente der Schnittlinie gehen; alle Tangentialebenen bilden ebenfalls einen Büschel; durch die Wahl der Tangentialebene ist auch die Fläche des Büschels bestimmt.

2. Durch die beiden Fächen:

$$(3) \quad \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa = 0, \quad \Sigma b_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa = 0$$

wird der Flächenbüschel zweiter Ordnung:

$$(4) \quad \Sigma (a_{\iota\varkappa} + \lambda b_{\iota\varkappa}) x_\iota x_\varkappa = 0$$

bestimmt.

Die Polareigenschaften gründen sich auf folgenden einfachen Satz:

Wenn zwei Punkte konjugierte Pole in Bezug auf zwei Flächen zweiter Ordnung sind, so sind sie auch

konjugierte Pole für jede Fläche des Büschels, dem die beiden gegebenen Flächen angehören.

Die Punkte (x′) und (x″) mögen konjugierte Pole in Bezug auf die Flächen (3) sein; es mögen also die Gleichungen bestehen:

$$(5) \quad \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa'' = 0, \quad \Sigma b_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa'' = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt aber:

$$(6) \quad \Sigma(a_{\iota\varkappa} + \lambda b_{\iota\varkappa}) x_\iota' x_\varkappa'' = 0,$$

und daraus geht die Behauptung unmittelbar hervor.

Wenn aber die Punkte (x′) und (x″) nicht für jede Fläche des Büschels konjugierte Pole sind, so giebt es immer eine Fläche desselben, welche die beiden Punkte zu konjugierten Polen hat. Denn sobald die Gleichungen (5) nicht beide erfüllt sind, genügt die Gleichung (6), um den Koefficienten λ zu bestimmen.

3. Die Polarebenen eines beliebigen Punktes in Bezug auf die Flächen eines Büschels zweiter Ordnung schneiden sich in einer geraden Linie.

Die Polarebenen des Punktes (x′) in Bezug auf zwei Flächen des Büschels schneiden sich, falls sie nicht zusammenfallen, in einer geraden Linie. Da jeder Punkt dieser Geraden nach dem soeben bewiesenen Satze in Bezug auf irgend eine Fläche des Büschels konjugierter Pol zum Punkte (x′) ist, mufs auch die Polarebene von (x′) jedesmal durch die Linie gehen.

Auf dieselbe Weise ergiebt sich der Satz:

Wenn die Polarebenen eines Punktes für zwei Flächen des Büschels zusammenfallen, so hat dieser Punkt dieselbe Ebene zur Polarebene in Bezug auf alle Flächen des Büschels.

4. Wenn einem Büschel zweiter Ordnung eine Kegelfläche angehört, so hat die Spitze derselben für alle Flächen des Büschels dieselbe Polarebene;

und umgekehrt:

Ein Punkt, welcher für alle Flächen des Büschels dieselbe Polarebene hat, ist die Spitze eines dem Büschel angehörenden Kegels.

Um den ersten Satz zu beweisen, bestimmen wir den Büschel durch den Kegel und eine beliebige andere Fläche. Zur Spitze des Kegels ist in Bezug auf ihn selbst jeder Punkt des Raumes

konjugierter Pol; jeder Punkt der Polarebene der Spitze in Bezug auf die zweite Fläche ist also konjugierter Pol für zwei, und somit auch für alle Flächen des Büschels.

Beim Beweise der Umkehrung haben wir zu unterscheiden, ob der Punkt in der gemeinschaftlichen Polarebene liegt oder nicht. Im letzten Falle darf diejenige Fläche des Büschels, welche durch den Punkt geht, zu diesem Punkte keine Polarebene liefern; denn einerseits sind zu ihm in Bezug auf diese Fläche die Punkte der gegebenen Ebene konjugierte Pole, anderseits mufs der Punkt zu sich selbst konjugierter Pol sein; er ist also singulärer Punkt, oder die Fläche ist ein Kegel und der Punkt sein Scheitel, wenn nicht etwa die hindurchgelegte Fläche in ein Ebenenpaar oder eine Doppelebene übergeht.

Wenn aber der Punkt in der gemeinschaftlichen Polarebene und somit auch in der Schnittlinie der Flächen liegt, so kann man (nach der Schlufsbemerkung von Nr. 2) eine Fläche dadurch bestimmen, dafs man verlangt, in Bezug auf diese Fläche solle dem Punkte auch noch ein Punkt π_1 zugeordnet sein, der nicht in jener Ebene liegt. Für diese Fläche hat der Punkt wiederum keine feste Polarebene, er ist vielmehr singulärer Punkt.

5. Hieran schliefsen wir noch folgenden Satz an:

Wenn ein Büschel zweiter Ordnung zwei Kegel enthält, so sind die Spitzen konjugierte Pole in Bezug auf alle Flächen des Büschels.

Sind die Punkte 1 und 2 die Spitzen zweier Kegel, so ist in Bezug auf den ersten Kegel zum Punkte 1 jeder Punkt und somit auch der Punkt 2 konjugierter Pol; ebenso ist dem Punkte 2 in Bezug auf den zweiten Kegel der Punkt 1 zugeordnet; die Punkte 1 und 2 sind demnach konjugierte Pole für zwei und damit für alle Flächen des Büschels.

6. Wir wollen die bisher gefundenen Sätze analytisch beweisen. Die Polarebenen des Punktes (x') in Bezug auf die Flächen (3) sind:

$$(7) \quad \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa = 0, \quad \Sigma b_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa = 0.$$

Da die Polarebene desselben Punktes für die Ebene (4) die Gleichung hat:

$$\Sigma(a_{\iota\varkappa} + \lambda b_{\iota\varkappa}) x_\iota' x_\varkappa = 0 \text{ oder } \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa + \lambda \Sigma b_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa = 0,$$

so gehört sie dem durch die beiden Ebenen (7) bestimmten Büschel an.

Macht man dieselbe Konstruktion für einen zweiten Punkt (x″), so vermitteln die Flächen des Büschels eine projektive Zuordnung der beiden Ebenenbüschel:

$$(8)\quad \Sigma a_{\iota\varkappa}\, x_\iota' x_\varkappa + \lambda \Sigma b_{\iota\varkappa}\, x_\iota'' x_\varkappa = 0 \text{ und}$$
$$\Sigma a_{\iota\varkappa}\, x_\iota'' x_\varkappa + \lambda \Sigma b_{\iota\varkappa}\, x_\iota'' x_\varkappa = 0.$$

Indem man in den beiden Büscheln (8) diejenigen Ebenen einander zuordnet, welche derselben Fläche entsprechen, hat man dem Koefficienten λ jedesmal denselben Wert beizulegen. Dadurch werden (nach § 5, 7 S. 34) die Ebenenbüschel einander projektiv zugeordnet. Für vier Ebenen des ersten Büschels, welche zu den Werten λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 des Koefficienten λ gehören, hat das Doppelverhältnis den Wert:

$$\frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_4 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_4}.$$

Dies ist aber auch das Doppelverhältnis der zugeordneten Ebenen des zweiten Büschels.

7. Wenn der Punkt (x′) für beide Flächen (3) und damit auch für alle Flächen (4) dieselbe Polarebene haben soll, wenn demnach die Gleichungen (7) dieselbe Ebene darstellen sollen, so dürfen sich in diesen beiden Gleichungen die Koefficienten von $x_1 \ldots x_4$ nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden. Da die Variabele x_α in der ersten Gleichung den Koefficienten

$$\Sigma a_{\alpha\varkappa}\, x_\varkappa'$$

und in der zweiten den Koefficienten

$$\Sigma_{\varkappa} b_{\alpha\varkappa}\, x_\varkappa'$$

hat, so müssen die Gleichungen bestehen:

$$(9)\quad \begin{aligned}
&(a_{11} - \omega b_{11})\, x_1' + (a_{12} - \omega b_{12})\, x_2' + (a_{13} - \omega b_{13})\, x_3' \\
&\qquad + (a_{14} - \omega b_{14})\, x_4' = 0 \\
&(a_{21} - \omega b_{21})\, x_1' + (a_{22} - \omega b_{22})\, x_2' + (a_{23} - \omega b_{23})\, x_3' \\
&\qquad + (a_{24} - \omega b_{24})\, x_4' = 0 \\
&(a_{31} - \omega b_{31})\, x_1' + (a_{32} - \omega b_{32})\, x_2' + (a_{33} - \omega b_{33})\, x_3' \\
&\qquad + (a_{34} - \omega b_{34})\, x_4' = 0 \\
&(a_{41} - \omega b_{41})\, x_1' + (a_{42} - \omega b_{42})\, x_2' + (a_{43} - \omega b_{43})\, x_3' \\
&\qquad + (a_{44} - \omega b_{44})\, x_4' = 0.
\end{aligned}$$

Demnach muſs ω eine Wurzel der Gleichung sein:

$$(10)\quad \begin{vmatrix} a_{11}-\omega b_{11} & a_{12}-\omega b_{12} & \dots & a_{14}-\omega b_{14} \\ a_{21}-\omega b_{21} & a_{22}-\omega b_{22} & \dots & a_{24}-\omega b_{24} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{41}-\omega b_{41} & a_{42}-\omega b_{42} & \dots & a_{44}-\omega b_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Solange zwischen den Koefficienten $a_{\iota\varkappa}$ und $b_{\iota\varkappa}$ keine besonderen Beziehungen bestehen, hat die vorstehende Gleichung vier verschiedene Wurzeln $\omega_1 \dots \omega_4$. Zu jeder von ihnen gehört ein Wertsystem $(x_1' \dots x_4')$, welches den Gleichungen (9) genügt, und somit ein Punkt, welcher in Bezug auf alle Flächen des Büschels dieselbe Polarebene hat. Daraus folgt:

Im allgemeinen giebt es vier Punkte des Raumes, welche für alle Flächen des Büschels dieselbe Polarebene besitzen.

8. Zu der Wurzel ω_1 möge das Wertsystem (x') und zu der von ω_1 verschiedenen Wurzel ω_2 das Wertsystem (x'') vermittelst der Gleichungen (9) zugeordnet sein. Es möge demnach in den Gleichungen (9) ω durch ω_1 ersetzt werden und auſserdem möge sein:

$$(11)\quad \begin{aligned} (a_{11}-\omega_2 b_{11})\,x_1'' + \dots + (a_{14}-\omega_2 b_{14})\,x_4'' &= 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots & \\ (a_{41}-\omega_2 b_{41})\,x_1'' + \dots + (a_{44}-\omega_2 b_{44})\,x_4'' &= 0. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (9) multiplizieren wir der Reihe nach mit x_1'', x_2'', x_3'', x_4''; dann folgt durch Addition:

$$(12)\quad \Sigma a_{\iota\varkappa}\, x_\iota'\, x_\varkappa'' - \omega_1 \Sigma b_{\iota\varkappa}\, x_\iota'\, x_\varkappa'' = 0.$$

Ebenso leitet man aus den Gleichungen (11) durch Multiplikation mit $x_1' \dots x_4'$ die Gleichung her:

$$(13)\quad \Sigma a_{\iota\varkappa}\, x_\iota''\, x_\varkappa' - \omega_2 \Sigma b_{\iota\varkappa}\, x_\iota''\, x_\varkappa' = 0.$$

Da aber

$$\Sigma a_{\iota\varkappa}\, x_\iota'\, x_\varkappa'' = \Sigma a_{\iota\varkappa}\, x_\iota''\, x_\varkappa', \quad \Sigma b_{\iota\varkappa}\, x_\iota'\, x_\varkappa'' = \Sigma b_{\iota\varkappa}\, x_\iota''\, x_\varkappa'$$

ist, so ergiebt sich durch Subtraktion der Gleichungen (12) und (13) die Relation:

$$(\omega_1 - \omega_2)\, \Sigma b_{\iota\varkappa}\, x_\iota'\, x_\varkappa'' = 0.$$

Hier ist der Faktor $\omega_1 - \omega_2$ von null verschieden. Da somit der zweite Faktor verschwinden muſs, gehen aus den Gleichungen (12) und (13) die Beziehungen hervor:

$$(14)\quad \Sigma a_{\iota\varkappa}\, x_\iota'\, x_\varkappa'' = 0, \quad \Sigma b_{\iota\varkappa}\, x_\iota'\, x_\varkappa'' = 0.$$

Diese beiden Gleichungen sagen aus, dafs die Punkte (x′) und (x″) konjugierte Pole in Bezug auf sämtliche Flächen des Büschels sind.

Es mögen jetzt 1, 2, 3, 4 die vier Punkte sein, von denen jeder für alle Flächen des Büschels eine gemeinsame Polarebene besitzt. Dann sind zum Punkte 1 die drei Punkte 2, 3, 4 konjugierte Pole; also ist die durch die drei Punkte 2, 3, 4 gelegte Ebene Polarebene zum Punkte 1 in Bezug auf alle Flächen des Büschels. Da dasselbe von den andern Punkten gilt, so ist das Tetraeder, dessen Eckpunkte die Punkte 1, 2, 3, 4 sind, gemeinsames Polartetraeder für alle Flächen des Büschels.

Die Flächen eines Büschels zweiter Ordnung haben im allgemeinen ein gemeinsames Polartetraeder.

9. Die Gleichung (10) ist die Bedingung dafür, dafs die Gleichung

$$\Sigma(a_{\iota\varkappa} - \omega b_{\iota\varkappa})\, x_\iota x_\varkappa = 0$$

einen Kegel darstellt. Wenn umgekehrt die Fläche

$$\Sigma(a_{\iota\varkappa} + \lambda b_{\iota\varkappa})\, x_\iota x_\varkappa = 0$$

ein Kegel sein soll, so mufs die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \lambda b_{11} & \dots & a_{14} + \lambda b_{14} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{41} + \lambda b_{41} & \dots & a_{44} + \lambda b_{44} \end{vmatrix}$$

verschwinden.

Daraus gehen folgende Sätze hervor:

Einem Flächenbüschel zweiter Ordnung gehören im allgemeinen vier Kegel an; die Spitzen derselben sind die Eckpunkte des gemeinsamen Polartetraeders.

Wir können den ersten Teil des Satzes auch in folgender Weise aussprechen:

Durch die Schnittlinie zweier Flächen zweiter Ordnung gehen im allgemeinen vier Kegel zweiter Ordnung hindurch.

Um aus diesem Satze noch eine andere einfache Folgerung zu ziehen, berücksichtigen wir folgendes. Durch neun Punkte, die keine besondere Lage zu einander haben, läfst sich eine einzige Fläche zweiter Ordnung legen; durch acht von diesen Punkten und einen beliebig gewählten neunten Punkt ist eine zweite Fläche zweiter Ordnung bestimmt. Diese acht Punkte liegen auf jeder

Fläche des durch die beiden Flächen bestimmten Büschels; der Büschel selbst ist durch die acht Punkte bestimmt. Wir erhalten hiernach den Satz:

Durch acht Punkte des Raumes lassen sich im allgemeinen vier Kegel zweiter Ordnung legen.

10. Indem wir die Spitzen der vier in einem Büschel enthaltenen Kegel zu Eckpunkten eines Koordinatentetraeders wählen, nehmen die Gleichungen der Flächen die Form von vier Quadraten an. Es ist also:

$$(15)\quad \begin{aligned} \Sigma a_{\iota\varkappa}\, x_\iota x_\varkappa &= A_1 y_1^2 + A_2 y_2^2 + A_3 y_3^2 + A_4 y_4^2 \\ \Sigma b_{\iota\varkappa}\, x_\iota x_\varkappa &= B_1 y_1^2 + B_2 y_2^2 + B_3 y_3^2 + B_4 y_4^2. \end{aligned}$$

Die Lösung der Aufgabe:

Zwei homogene quadratische Formen in vier Variabeln als Summe derselben vier Quadrate darzustellen, kommt hiernach auf das folgende hinaus:

Man bestimme die vier Wurzeln der Gleichung (10); zu jeder Wurzel suche man ein Wertsystem $(x_1' \ldots x_4')$, welches den Gleichungen (9) genügt. Alsdann wähle man vier homogene lineare Funktionen y_1, y_2, y_3, y_4 von $x_1 \ldots x_4$ derartig, dafs jede unter ihnen für je drei der gefundenen Wertsysteme verschwindet. Stellen wir jetzt die beiden quadratischen Formen durch die neuen Variabeln $y_1 \ldots y_4$ dar, so fallen die Produkte $y_\iota y_\varkappa$ für ungleiche Marken ι, $\varkappa$ weg.

11. Wir multiplizieren die erste Gleichung (15) mit B_1, die zweite mit A_1 und subtrahieren; dadurch erhalten wir die Gleichung:

$$\Sigma (B_1 a_{\iota\varkappa} - A_1 b_{\iota\varkappa})\, x_\iota x_\varkappa = (A_2 B_1 - A_1 B_2)\, y_2^2 + (A_3 B_1 - A_1 B_3)\, y_3^2 + (A_4 B_1 - A_1 B_4)\, y_4^2.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung enthält nur drei Quadrate; daher mufs auch durch das Verschwinden der linken Seite ein Kegel dargestellt werden; es verschwindet also die Determinante:

$$\begin{vmatrix} B_1 a_{11} - A_1 b_{11} & \ldots & B_1 a_{14} - A_1 b_{14} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ B_1 a_{41} - A_1 b_{41} & \ldots & B_1 a_{44} - A_1 b_{44} \end{vmatrix}$$

oder der Quotient $A_1 : B_1$ ist eine Wurzel der Gleichung (10).

Aus demselben Grunde sind auch die Quotienten $A_2 : B_2$, $A_3 : B_3$, $A_4 : B_4$ Wurzeln der Gleichung (10). Da wir über die Marken noch beliebig verfügen können, so dürfen wir setzen:

$$A_1 = B_1 \omega_1,\quad A_2 = B_2 \omega_2,\quad A_3 = B_3 \omega_3,\quad A_4 = B_4 \omega_4.$$

Da die Wurzeln $\omega_1 \ldots \omega_4$ auch imaginär sein können, müssen wir für die Koefficienten im Ausdrucke für $y_1 \ldots y_4$, sowie für die neuen Koefficienten $A_1 \ldots A_4$, $B_1 \ldots B_4$ auch komplexe Werte zulassen. Wir dürfen daher auch noch weitere imaginäre Gröfsen benutzen und demnach

$$y_1 \sqrt{B_1} = z_1,\ y_2 \sqrt{B_2} = z_2,\ y_3 \sqrt{B_3} = z_3,\ y_4 \sqrt{B_4} = z_4$$

setzen. Dadurch erhalten wir folgende Darstellung:

$$\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa = \omega_1 z_1^2 + \omega_2 z_2^2 + \omega_3 z_3^2 + \omega_4 z_4^2$$
$$\Sigma b_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2,$$

wo $\omega_1 \ldots \omega_4$ die Wurzeln der Gleichung (10) sind.

12. Wir gehen zu den Gleichungen (3) und (4) zurück und nehmen an, das benutzte Koordinatensystem habe keinerlei besondere Lage dem Büschel gegenüber; hiernach vertritt die Ebene $x_4 = 0$ eine beliebige Ebene des Raumes. Setzen wir in der Gleichung (4) die Variabele x_4 gleich null, so stellt diese Gleichung den Schnitt der Flächen des Büschels mit der Ebene $x_4 = 0$ dar. Daraus geht hervor, dafs jede Ebene einen Flächenbüschel zweiter Ordnung in einem Kegelschnittsbüschel schneidet.

Da die Kurven eines Büschels zweiter Ordnung im allgemeinen vier Punkte gemeinschaftlich haben, so wird auch die Schnittlinie zweier Flächen zweiter Ordnung im allgemeinen von einer Ebene in vier Punkten geschnitten. Diese Schnittlinie kann aber nur dann einen ebenen Zweig besitzen, wenn dem Büschel ein Ebenenpaar oder eine Doppelebene angehört. Soll dieser Fall eintreten, so müssen die Koefficienten in den Gleichungen der Flächen besonderen Bedingungen genügen (vergleiche den folgenden Paragraphen). Solange also zwei Flächen nicht besondere Lage zu einander haben, hat ihre Schnittlinie mit jeder Ebene nur eine endliche Zahl von Punkten gemein; sie ist eine Raumkurve. Nun legen wir einer Raumkurve die m^{te} Ordnung bei, wenn sie mit einer Ebene im allgemeinen m Punkte gemein hat (genauer, wenn die Schnittpunkte vermittelst einer Gleichung m^{ten} Grades berechnet werden). Daher gilt der Satz:

Die Schnittlinie zweier Flächen zweiter Ordnung ist im allgemeinen eine Raumkurve vierter Ordnung.

13. Die Bedingung dafür, dafs die beiden Punkte (x′) und (x″) der Ebene $x_4 = 0$ konjugierte Pole in Bezug auf die Flächen des Büschels sind, ergiebt sich aus den Gleichungen (5), wenn

man darin x_4' und x_4'' gleich null setzt. Daher sind Punkte dieser Ebene, die einander in Bezug auf den in ihr enthaltenen Kegelschnittsbüschel konjugiert zugeordnet sind, auch konjugierte Pole für die Flächen des Büschels.

In I § 23 haben wir für die Kegelschnittsbüschel folgende Sätze gefunden: Im allgemeinen hat jeder Punkt einen konjugierten Pol, den Schnittpunkt der Polaren des Punktes; nur drei Punkte haben dieselbe Polare in Bezug auf alle Kurven des Büschels; diese drei Punkte sind die Eckpunkte eines den Kurven gemeinsamen Polardreiecks; zugleich ist jeder dieser Punkte der singuläre Punkt für ein Linienpaar, welches dem Büschel angehört; weitere Linienpaare sind in dem Büschel nicht enthalten.

Dementsprechend sind die Punkte der Ebene einander paarweise in Bezug auf die Flächen des Büschels zugeordnet; dabei entspricht jedem ihrer Punkte der Schnittpunkt der gemeinsamen Polare mit der Ebene. Nur die Polaren dreier Punkte fallen ganz in die Ebene hinein, und zwar ist die Verbindungslinie von je zweien dieser Punkte jedesmal die Polare des dritten. Diese drei Punkte bilden mit dem Pol der Ebene in Bezug auf eine beliebig ausgewählte Fläche des Büschels die Ecken eines Polartetraeders der Fläche. (Dabei wird nur vorausgesetzt, dafs die Ebene von der Fläche nicht berührt wird.) Speciell bilden die Verbindungslinien der drei Punkte mit der Spitze eines dem Büschel angehörenden Kegels drei konjugierte Durchmesser dieses Kegels.

Aus den oben erwähnten Sätzen geht ferner unmittelbar hervor, dafs drei Flächen des Büschels die gegebene Ebene in Linienpaaren schneiden. Jede dieser Flächen wird von der Ebene berührt (§ 13, 5, S. 94). Demnach gilt der Satz:

In einem Flächenbüschel giebt es im allgemeinen drei Flächen, welche eine gegebene Ebene berühren; die Berührungspunkte haben die Eigenschaft, dafs die Verbindungslinie von je zwei unter ihnen die gemeinsame Polare des dritten Punktes ist.

Den ersten Teil dieses Satzes sprechen wir noch in folgender Weise aus:

Es giebt im allgemeinen drei Flächen zweiter Ordnung, welche durch acht Punkte gehen und eine vorgeschriebene Ebene berühren.

Indem wir die ausgewählte Ebene durch die unendlichferne Ebene ersetzen, erhalten wir folgende Sätze:

Der Flächenbüschel zweiter Ordnung enthält im allgemeinen drei Paraboloide; zieht man durch den Mittelpunkt irgend einer Fläche des Büschels die Parallelen zu den Durchmessern dieser Paraboloide, so bilden diese für die Fläche ein System konjugierter Durchmesser.

Durch acht Punkte von allgemeiner Lage lassen sich drei Paraboloide legen.

14. Für besondere Lagen der Ebene weist der ausgeschnittene Kegelschnittsbüschel specielle Eigenschaften auf. So müssen die Kurven des Büschels einander sämtlich berühren, wenn die Ebene eine Tangente der Raumkurve vierter Ordnung enthält. Ferner schneidet in dem Falle, dafs die Ebene durch die Spitze eines dem Büschel angehörenden Kegels geht, dieser Kegel in einem Geradenpaare und vertritt, ohne im eigentlichen Sinne zu berühren, eine berührende Fläche.

Besonderes Interesse gewährt der Fall, dafs die Ebene einen Kegel des Büschels berührt. Alsdann gehört dem Kegelschnittsbüschel eine Doppelgerade an, nämlich die Erzeugende des Kegels, längs deren die Berührung stattfindet. Nach I § 25 hat jeder Punkt der Doppelgeraden in Bezug auf alle Kurven des Büschels dieselbe Polare. Der Kurvenbüschel besitzt einfach unendlichviele gemeinsame Polardreiecke; allen diesen gehört die Doppelgerade als Seite und ihr Pol als Eckpunkt an.

Da der Kurvenbüschel aufser der Doppelgeraden nur noch ein einziges Geradenpaar enthält, so wird die Ebene von einer einzigen zweiten Fläche des Büschels berührt.

15. Die Lage einer Geraden den Flächen des Büschels gegenüber braucht nicht näher untersucht zu werden; in dieser Hinsicht gelten dieselben Sätze, wie für den Kegelschnittsbüschel, und die Beweise zeigen keinerlei Verschiedenheit. Es genügt daher, die Sätze anzuführen:

Unter den Flächen eines Büschels zweiter Ordnung giebt es im allgemeinen zwei, welche eine gegebene gerade Linie berühren; ihre Berührungspunkte sind konjugierte Pole in Bezug auf alle Flächen des Büschels.

Die Schnittpunkte mit den einzelnen Flächen bilden eine Involution, deren Hauptpunkte die beiden Berührungspunkte sind.

Durch acht gegebene Punkte gehen im allgemeinen zwei Flächen zweiter Ordnung, welche eine ebenfalls gegebene gerade Linie berühren.

16. Es dürfte angemessen sein, eine zweite Methode kurz anzudeuten, nach welcher die vorhin bewiesenen Sätze gefunden werden können, und einige weitere Sätze über die Schnittlinie zweier Flächen zweiter Ordnung beizufügen.

Durch die drei Punkte (ξ), (η), (ζ) sei eine Ebene gelegt; dann lassen sich die Koordinaten $(x_1 \ldots x_4)$ irgend eines Punktes derselben in der Form darstellen:

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1\xi_1 + \lambda_2\eta_1 + \lambda_3\zeta_1 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_4 &= \lambda_1\xi_4 + \lambda_2\eta_4 + \lambda_3\zeta_4. \end{aligned}$$

Durch Einsetzung dieser Werte gehen die Gleichungen (3) über in

$$\begin{aligned} \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa &= \Sigma a_{\iota\varkappa} (\lambda_1\xi_\iota + \lambda_2\eta_\iota + \lambda_3\zeta_\iota)(\lambda_1\xi_\varkappa + \lambda_2\eta_\varkappa + \lambda_3\zeta_\varkappa) \\ &= A_{11}\lambda_1^2 + A_{22}\lambda_2^2 + A_{33}\lambda_3^2 + 2A_{12}\lambda_1\lambda_2 \\ &\quad + 2A_{13}\lambda_1\lambda_3 + 2A_{23}\lambda_2\lambda_3, \\ \Sigma b_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa &= \Sigma b_{\iota\varkappa} (\lambda_1\xi_\iota + \lambda_2\eta_\iota + \lambda_3\zeta_\iota)(\lambda_1\xi_\varkappa + \lambda_2\eta_\varkappa + \lambda_3\zeta_\varkappa) \\ &= B_{11}\lambda_1^2 + B_{22}\lambda_2^2 + B_{33}\lambda_3^2 + 2B_{12}\lambda_1\lambda_2 \\ &\quad + 2B_{13}\lambda_1\lambda_3 + 2B_{23}\lambda_2\lambda_3. \end{aligned}$$

Jetzt gehen die Bedingungsgleichungen dafür, dafs zwei Punkte (x') und (x'') dieser Ebene konjugierte Pole der beiden Flächen sind, nämlich die Gleichungen:

$$\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa'' = 0, \quad \Sigma b_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa'' = 0$$

über in die folgenden:

$$\sum_{\rho,\sigma} A_{\rho\sigma}\lambda_\rho'\lambda_\sigma'' = 0, \quad \sum_{\rho,\sigma} B_{\rho\sigma}\lambda_\rho'\lambda_\sigma'' = 0.$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich die gewonnenen Resultate leicht herleiten.

17. In § 12, 3 (S. 87) haben wir die Koordinaten (x') für den Pol der Ebene

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 = 0$$

in Bezug auf die Fläche $\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa = 0$ bestimmt. Dabei fanden wir für die Verhältnisse der Koordinaten Ausdrücke, in denen

die Koefficienten der Ebene mit den Unterdeterminanten dritten Grades der aus den Koefficienten a_{ik} der Fläche gebildeten Determinante multipliziert werden. Sucht man den Pol dieser Ebene in Bezug auf die Fläche (4) des Büschels, so mufs man in diesen Ausdrücken jeden Koefficienten a_{ik} durch $a_{ik} + \lambda b_{ik}$ ersetzen. Daher werden die Verhältnisse der Koordinaten Funktionen dritten Grades von λ; man erhält Gleichungen von folgender Form:

$$\varrho x_1' = A_1 + B_1\lambda + C_1\lambda^2 + D_1\lambda^3$$

. . . . . .

$$\varrho x_4' = A_4 + B_4\lambda + C_4\lambda^2 + D_4\lambda^3,$$

wo die sechzehn Koefficienten A_α, B_α, C_α, D_α von den Gröfsen a_{ik}, b_{ik}, c_i abhangen.

Um die Gesamtheit der Pole zu erhalten, mufs man dem Parameter λ alle möglichen Werte beilegen. Dadurch werden die Koordinaten von dem Parameter λ abhängig; die Punkte füllen also eine Kurve an. Diejenigen Pole, welche in der Ebene

$$b_1x_1' + b_2x_2' + b_3x_3' + b_4x_1' = 0$$

liegen, werden dadurch bestimmt, dafs man die angegebenen Werte der Koordinaten in die Gleichung dieser Ebene einsetzt; da die hierdurch erhaltene Gleichung vom dritten Grade in λ ist, so enthält die Ebene drei Pole. Es gilt also der Satz:

Die Pole zu einer festen Ebene in Bezug auf die Flächen eines Büschels zweiter Ordnung liegen in einer Raumkurve dritter Ordnung.

Auch die gegebene Ebene wird von dieser Kurve in drei Punkten geschnitten; daher giebt es im Büschel drei Flächen, für welche der Pol einer gegebenen Ebene in sie selbst hineinfällt, oder drei Flächen des Büschels werden von der Ebene berührt.

18. Wir haben gesehen, dafs der vollständige Schnitt zweier Flächen zweiter Ordnung in einer Raumkurve vierter Ordnung besteht. Nun zeigt die Theorie der algebraischen Kurven, dafs nicht umgekehrt jede Raumkurve vierter Ordnung zwei Flächen zweiter Ordnung gemeinschaftlich ist; man nennt daher die Schnittlinie zweier Flächen zweiter Ordnung eine Raumkurve vierter Ordnung erster Species. Durch eine solche Kurve lassen sich vier Kegel zweiter Ordnung legen. Jede Gerade, die von der Spitze eines solchen Kegels nach einem Punkte der Kurve gezogen werden kann, ist eine Erzeugende des Kegels. Da sie

eine beliebige zweite Fläche des Büschels noch in einem zweiten Punkte trifft, so ergiebt sich der Satz:

Es giebt vier Punkte des Raumes von der Beschaffenheit, daſs jede von einem dieser Punkte aus nach einem beliebigen Punkte einer vorgelegten Raumkurve vierter Ordnung erster Species gezogene Gerade noch einen zweiten Punkt mit der Kurve gemein hat.

19. Durch eine gegebene Raumkurve vierter Ordnung erster Species und einen ihr nicht angehörenden Punkt π läſst sich eine Fläche zweiter Ordnung legen. Wenn diese Fläche eine eigentliche geradlinige Fläche ist, so gehen durch jeden ihrer Punkte, speciell durch den Punkt π, zwei Geraden der Fläche hindurch. Jede dieser Geraden hat zwei (reelle oder imaginäre) Punkte mit der Kurve gemein; sie ist eine Sekante der Kurve. Umgekehrt hat jede von π ausgehende Gerade, welche die Kurve zweimal trifft, mit der durch π gelegten Fläche des Büschels drei Punkte gemein; sie gehört dieser Fläche ganz an. Somit gilt der Satz:

Durch jeden Punkt des Raumes, der nicht einer gegebenen Raumkurve vierter Ordnung erster Species angehört und nicht mit der Spitze eines der vier hindurchgehenden Kegel identisch ist, gehen zwei oder keine Sekanten der Kurve hindurch, jenachdem die durch den Punkt und die Kurve gelegte Fläche geradlinig oder ungeradlinig ist; in dem speciellen Falle, daſs durch den Punkt einer der vier Kegel hindurchgeht, kann man durch den Punkt nur eine einzige Sekante der Kurve legen.

Man kann auch sagen, durch jeden Punkt einer ungeradlinigen Fläche zweiter Ordnung gingen zwei imaginäre Gerade der Fläche hindurch. Wir können daher den vorstehenden Satz auch in folgender Weise aussprechen:

Durch jeden Punkt des Raumes gehen im allgemeinen zwei reelle oder imaginäre Sekanten einer Raumkurve vierter Ordnung erster Species.

Übungen:

1) a) Die Schnittkurve zweier Flächen zweiter Ordnung werde von einer Ebene in den vier reellen Punkten α, β, γ, δ geschnitten; welches ist die gemeinschaftliche Polare des Schnittpunktes der Geraden $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$?

b) Für welche Punkte der Ebene gehören die gemeinsamen Polaren dieser selben Ebene an?

c) In welchen Punkten wird die Ebene von Flächen des Büschels berührt? Welcher Art sind diese Flächen?

d) Wie ändern sich die gefundenen Resultate, falls zwei oder alle vier Schnittpunkte imaginär sind (vgl. I § 23, 9)?

2) a) Nachdem ein Flächenbüschel zweiter Ordnung gegeben ist, lege man durch einen Punkt und eine gemeinschaftliche Polare eine Ebene. Inwieweit läfst sich hiernach schon die Lage der Diagonalpunkte desjenigen Vierecks bestimmen, welches die Schnittpunkte der Ebene mit der Grundkurve des Büschels zu Eckpunkten hat?

b) Wenn man aufserdem von diesen Schnittpunkten zwei kennt, welche nicht in gerader Linie liegen, so sollen die beiden andern gefunden werden.

c) Hiernach löse man folgende Aufgabe:

Von einem Punkte aus soll man an die Schnittkurve zweier gegebener Flächen zweiter Ordnung die Sekanten konstruieren.

3) Wenn das einem Flächenbüschel zweiter Ordnung gemeinsame Polartetraeder reell ist, so haben wir zwei Fälle zu unterscheiden:

a) entweder sind auch die vier Kegel des Büschels reell,

b) oder es sind zwei Kegel reell, die beiden andern imaginär.

Im ersten Falle ist auch die Schnittkurve reell, im zweiten ist sie imaginär.

(Die Gleichungen der den Büschel bestimmenden Flächen können in der Form vorausgesetzt werden:

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2 = 0$$
$$b_1x_1^2 + b_2x_2^2 + b_3x_3^2 + b_4x_4^2 = 0.$$

Da der Büschel nur ein einziges Polartetraeder besitzen soll, darf keine der sechs Determinanten $a_\iota b_\varkappa - a_\varkappa b_\iota$ verschwinden. Aus der Beziehung zwischen diesen sechs Gröfsen folgt die Richtigkeit der Behauptung.)

4) Wir betrachten den Fall, dafs die vier Kegel reell sind. Unter dieser Annahme können wir bei Benutzung von drei positiven Konstanten c_1, c_2, c_3, welche in der Beziehung stehen: $c_1 + c_3 = c_2$, die Gleichungen der vier Kegel in der Form schreiben:

$K_1 = c_1x_2^2 - c_2x_3^2 + c_3x_4^2 = 0$, $K_2 = c_1x_1^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$,
$K_3 = c_2x_1^2 + x_2^2 - x_4^2 = 0$, $K_4 = c_3x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$.

a) Jede durch die Gerade $x_1 = x_2 = 0$ gelegte Ebene hat mit der Schnittkurve vier reelle Punkte gemeinschaftlich; die fünf andern Kanten des Polartetraeders haben diese Eigenschaft nicht.

b) Von den vier Ebenen des gemeinschaftlichen Polartetraeders schneiden zwei die Kurve, während die beiden andern keinen Punkt mit ihr gemein haben. Ebenso liegen die Spitzen zweier Kegel je im Äufsern der drei andern Kegel, während die Spitzen der beiden andern Kegel je im Innern zweier und im Äufsern eines Kegels liegen. Denjenigen beiden Ebenen, von denen die Kurve geschnitten wird, liegen im Polartetraeder diejenigen Eckpunkte gegenüber, welche im Äufsern dreier Kegel liegen.

Wir wollen die beiden Kegel, deren Spitzen im Äufsern dreier Kegel liegen, als die beiden ersten und die andern als die beiden letzten bezeichnen. Nachdem unter den beiden ersten einer willkürlich als erster bezeichnet ist, soll derjenige dritter genannt werden, dessen Spitze im Innern des ersten liegt. Alsdann können wir sagen:

Die Spitze eines jeden der beiden ersten Kegel liegt im Äufsern dreier Kegel; von den beiden letzten Kegeln liegt die Spitze jedesmal im Innern des andern; aufserdem liegt die Spitze des dritten Kegels im Innern des ersten und die Spitze des vierten im Innern des zweiten.

c) Die Tangente, welche im Schnittpunkte einer Seitenfläche des Polartetraeders mit der Grundkurve an sie gelegt wird, geht durch die gegenüberliegende Ecke des Tetraeders.

(Einmal aus dem Begriffe konjugierter Pole, dann aus den Gleichungen herzuleiten.)

d) Erzeugende eines der vier Kegel können die Grundkurve nur in den Schnittpunkten mit einer gemeinsamen Polarebene berühren.

e) Auf jedem der zwei ersten Kegel liegen vier Tangenten der Kurve, während alle Erzeugenden eines der beiden letzten Kegel die Kurve in zwei getrennten Punkten schneiden.

f) Jeder Punkt, welcher aufserhalb der beiden ersten Kegel liegt, gehört auch dem Äufsern der beiden letzten Kegel an; ebenso gehört das gemeinsame Innere der beiden ersten Kegel

ganz dem Innern der beiden letzten an. Ein Punkt, der im $\left\{\begin{matrix}\text{Innern}\\ \text{Äufsern}\end{matrix}\right\}$ des ersten und dritten Kegels liegt, gehört auch dem $\left\{\begin{matrix}\text{Innern}\\ \text{Äufsern}\end{matrix}\right\}$ des vierten an; ebenso gehört das gemeinschaftliche $\left\{\begin{matrix}\text{Äufsere}\\ \text{Innere}\end{matrix}\right\}$ des zweiten und vierten Kegels dem $\left\{\begin{matrix}\text{Äufsern}\\ \text{Innern}\end{matrix}\right\}$ des dritten an. Ein Punkt, der im $\left\{\begin{matrix}\text{Äufsern}\\ \text{Innern}\end{matrix}\right\}$ des ersten und im $\left\{\begin{matrix}\text{Innern}\\ \text{Äufsern}\end{matrix}\right\}$ des vierten Kegels liegt, gehört dem $\left\{\begin{matrix}\text{Innern}\\ \text{Äufsern}\end{matrix}\right\}$ des dritten Kegels an.

(Man beachte die vier Gleichungen:

$$K_2 - K_3 + K_4 = 0,\ K_1 + c_3K_3 - c_2K_4 = 0,$$
$$K_1 + c_3K_2 - c_1K_4 = 0,\ K_1 + c_2K_2 - c_1K_3 = 0.)$$

g) Liegt ein Punkt ungleichmäfsig zu den beiden letzten Kegeln, so liegt er auch ungleichmäfsig zu den beiden ersten, und zwar liegt er alsdann gleichmäfsig sowohl zum ersten und vierten, wie zum zweiten und dritten.

h) Die vier Kegel des Büschels teilen den Raum in acht Teile. Indem wir das Äufsere durch $+$, das Innere durch $-$ bezeichnen, so ergeben sich folgende Möglichkeiten:

$$\begin{matrix} K_1 & + & - & - & + & + & - & + & - \\ K_2 & + & - & + & - & - & + & - & + \\ K_3 & + & - & + & - & + & + & - & - \\ K_4 & + & - & - & + & + & + & - & -. \end{matrix}$$

i) Wenn wir das Resultat der Einsetzung von $(x_1' \ldots x_4')$ in K_α durch K_α' bezeichnen, können wir der durch den Punkt (x') gehenden Fläche des Büschels auch die Gleichung geben:

$$K_1'x_1^2 - K_2'x_2^2 + K_3'x_3^2 - K_4'x_4^2 = 0.$$

k) Durch diejenigen Punkte des Raumes, welche gleichmäfsig zu den beiden letzten Kegeln, aber ungleichmäfsig zu den beiden ersten Kegeln liegen, gehen die ungeradlinigen Flächen des Büschels hindurch; durch jeden Punkt, der zu den beiden ersten Kegeln gleichmäfsig liegt, sowie durch jeden Punkt, der sowohl den beiden ersten wie den beiden letzten Kegeln gegenüber ungleichmäfsig liegt, läfst sich eine geradlinige Fläche des Büschels legen.

Mit andern Worten: Von den acht in h) aufgezählten Raumteilen enthalten die vier ersten alle geradlinigen und die vier letzten alle ungeradlinigen Flächen des Büschels.

l) Wie muſs hiernach ein Punkt des Raumes liegen, damit sich durch ihn zwei reelle Sekanten der Grundkurve legen lassen?

m) Durch welche Punkte des Raumes gehen zwei imaginäre Sekanten, durch welche geht nur eine einzige Sekante, und von welchen Punkten aus lassen sich unendlich viele Sekanten der Raumkurve ziehen?

n) Jede Fläche des Büschels gehört zwei unter den in h) aufgestellten Raumteilen an. Man gebe an, in welcher Weise die acht Raumteile je zu zweien derartig zusammengehören, daſs jede Fläche, welche Punkte des einen enthält, auch teilweise im anderen liegt.

o) Jede ungeradlinige Fläche wird entweder von der Ebene $x_3 = 0$ oder von der Ebene $x_4 = 0$ nicht geschnitten; die Kante $x_3 = x_4 = 0$ liegt also auſserhalb aller ungeradlinigen Flächen des Büschels.

p) Die durch die Kante $x_3 = x_4 = 0$ gelegten Ebenen schneiden mindestens einen der Kegel K_1 und K_2. Wenn eine Ebene nur einen dieser beiden Kegel schneidet, so berührt sie eine ungeradlinige Fläche des Büschels; schneidet sie aber beide Kegel, so ist sie auſserdem noch Tangentialebene an eine geradlinige Fläche des Büschels. Man gebe auch die Grenzlagen zwischen den hindurchgehenden Ebenen an.

q) Jede durch die Kante $x_1 = x_2 = 0$ gelegte Ebene schneidet zwei Kegel des Büschels in Geradenpaaren und berührt noch eine geradlinige Fläche.

r) Die Grundkurve des Büschels besteht aus zwei getrennten Zweigen.

(Man beachte die Lage ihrer Punkte etwa zum Kegel K_3.)

s) Man lege durch die Spitze eines der vier Kegel eine denselben $\left\{\begin{array}{c}\text{schneidende}\\ \text{nicht schneidende}\\ \text{berührende}\end{array}\right\}$ Ebene und untersuche den auf dieser Ebene ausgeschnittenen Kegelschnittsbüschel.

5) a) Wir wollen jetzt den Fall untersuchen, daſs das Polartetraeder reell, die Schnittkurve aber imaginär ist. Man soll

nachweisen, daſs in diesem Falle unter Benutzung dreier positiver Konstanten a_1, a_2, a_3, welche in der Beziehung stehen: $a_1 + a_3 = a_2$, die Gleichungen der vier Kegel immer in der Form vorausgesetzt werden dürfen:

$$K_1 = a_1 x_2^2 + a_2 x_3^2 + a_3 x_4^2,\ K_2 = a_1 x_1^2 + x_3^2 + x_4^2,$$
$$K_3 = a_2 x_1^2 - x_2^2 + x_4^2,\ K_4 = -a_3 x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

b) Auf verschiedene Weise zeige man, daſs die beiden reellen Kegel den Raum in drei Teile zerlegen: das Innere von je einem und das gemeinsame Äuſsere der beiden Kegel.

c) Die durch den Punkt (x′) gehende Fläche des Büschels hat die Gleichung:

$$K_1' x_1^2 - K_2' x_2^2 - K_3' x_3^2 + K_4' x_4^2 = 0.$$

Durch jeden Punkt, der im Innern eines Kegels liegt, geht eine nichtgeradlinige, durch jeden Punkt, der im Äuſsern beider Kegel liegt, eine geradlinige Fläche des Büschels.

d) Jede Berührungsebene an einen der beiden reellen Kegel schneidet aus dem Flächenbüschel einen Kegelschnittsbüschel aus, dessen Kurven eine Berührung in zwei imaginären Punkten eingehen. Die Ebene wird noch von einer nichtgeradlinigen Fläche berührt.

e) Jede andere Ebene wird von drei Flächen des Büschels berührt, und zwar von einer geradlinigen und zwei nichtgeradlinigen Flächen. Nur wenn die Ebene durch einen oder durch mehrere Eckpunkte des Polartetraeders geht, vertritt der durch diesen Punkt gehende Kegel eine berührende Fläche.

f) Jede gerade Linie, mit Ausnahme der Erzeugenden eines Kegels, wird von zwei Flächen des Büschels berührt. Die durch die Schnittpunkte mit den einzelnen Flächen erzeugte Involution ist hyperbolisch. Auf jeder Geraden liegt ein einziges Punktepaar, welches zu sich selbst konjugiert ist. Was gilt in dieser Beziehung von den Erzeugenden eines Kegels?

g) Jedem Büschel dieser Art gehören drei Paraboloide an, von denen einzelne durch Cylinder ersetzt werden können.

h) Wenn einem Büschel drei Cylinder angehören, so haben alle seine eigentlichen Flächen den Mittelpunkt mit dem Kegel gemeinschaftlich.

i) Wenn einem Büschel drei Cylinder angehören, so ist entweder einer oder es sind alle drei hyperbolisch.

6) a) Wir nehmen an, die Gleichung (10) habe zwei reelle und zwei imaginäre Wurzeln. Wieviel Eckpunkte, wieviel Ebenen und wieviel Kanten des gemeinsamen Polartetraeders sind jetzt reell?

b) In diesem Falle gehören dem Büschel nur zwei Kegel an, deren Gleichungen auf die Form gebracht werden können:

$$x_1^2 + 2x_3x_4 = 0,\ x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0.$$

c) Von der Spitze eines jeden der beiden Kegel gehen zwei Tangenten an die Kurve aus. Wo liegen die Berührungspunkte dieser Tangenten? Was gilt von den Erzeugenden eines jeden der beiden Kegel?

d) Man zeige hiernach, daſs die Schnittkurve aus einem Zweige besteht.

e) Die beiden Kegel zerlegen den Raum in vier Teile. Wie lassen sich dieselben charakterisieren?

f) Die vier Raumteile gehören in der Weise zusammen, daſs jede Fläche in zwei von ihnen eintritt. In welchen Teilen liegen die geradlinigen, in welchen die ungeradlinigen Flächen?

g) Jede Geradenschar auf einer Fläche des Büschels enthält sowohl eigentliche als uneigentliche Sekanten, sowie zwei Tangenten der Grundkurve.

h) Man untersuche den Schnitt mit den Ebenen $x_1 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$.

7) a) Wenn die Gleichung (10) vier imaginäre Wurzeln hat, so sind die Eckpunkte und die Seitenflächen des gemeinsamen Polartetraeders imaginär; nur ein Paar Gegenkanten sind reell. Die Flächen haben ein einziges Paar von reciproken Polaren gemeinsam.

b) Dem Büschel gehört kein Kegel an. Zwei beliebige Flächen desselben lassen sich durch die Gleichungen darstellen:

$$x_1x_2 + ax_3x_4 = 0,\ x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0,$$

wo a von ± 1 verschieden ist. Der Büschel enthält nur geradlinige Flächen.

c) Jede Gerade der einen Schar auf einer Fläche des Büschels schneidet die Grundkurve in verschiedenen Punkten; daher besteht diese aus zwei getrennten Zweigen. Unter den Geraden der andern Schar giebt es vier Tangenten, welche die eigentlichen und die uneigentlichen Tangenten von einander trennen; die

Schnittpunkte einer eigentlichen Sekante, welche dieser Schar angehört, liegen jedesmal auf demselben Zweige.

d) Von jedem Punkte des Raumes gehen zwei Sekanten der Kurve aus; von diesen ist mindestens eine eine eigentliche Sekante.

e) Jede Ebene hat mit der Kurve zwei oder vier Punkte gemeinschaftlich, falls sie nicht etwa durch eine ihrer Tangenten hindurchgeht.

f) Man untersuche den Kegelschnittsbüschel, in welchem eine beliebige durch die Gerade $x_1 = x_4 = 0$ gehende Ebene schneidet. Welche Verschiedenheiten können für die Ebenen noch bestehen, die sich durch diese Gerade legen lassen?

8) a) Zwei Kegel zweiter Ordnung, die einander nicht berühren, schneiden einander in einer Kurve, welche entweder aus zwei Zweigen oder aus einem Zweige besteht oder imaginär ist. Man charakterisiere in jedem dieser Fälle den zugehörigen Büschel.

b) Statt der beiden Kegel kann man zwei ungeradlinige Flächen wählen.

9) Einem gegebenen Flächenbüschel zweiter Ordnung gegenüber zerfallen die Geraden des Raumes in verschiedene Gruppen.

a) Zwei Flächen des Büschels schneiden die Gerade derartig in zwei Punktepaaren, dafs die Punkte des einen Paares durch die des andern getrennt werden. Alsdann wird jede Fläche von der Geraden geschnitten, keine berührt. Die Schnittpunkte mit den Flächen erzeugen eine elliptische Involution. Auf der Geraden liegt kein Paar konjugierter Pole.

b) Die beiden Punkte, in denen die Gerade von einer Fläche geschnitten wird, liegen in einer (endlichen oder unendlichen) Strecke, welche von den Schnittpunkten mit einer bestimmten andern Fläche begrenzt wird. In diesem Falle ist die auf der Geraden erzeugte Involution hyperbolisch. Auf ihr liegt ein Paar konjugierter Pole. Dem Büschel gehören auch Flächen an, welche keinen Punkt mit der Geraden gemeinschaftlich haben; zwei seiner Flächen werden von der Geraden berührt.

c) Die Gerade geht durch einen einzigen Punkt der Schnittkurve, ohne sie zu berühren. Jetzt erzeugen die Flächen des Büschels auf ihr eine parabolische Involution. Sie wird von einer einzigen seiner Flächen berührt.

d) Die Gerade hat mit der Schnittkurve zwei Punkte gemein

und gehört infolge dessen einer Fläche des Büschels an. Von jedem ihrer Punkte geht, falls sie nicht auf einem Kegel des Büschels liegt, noch eine zweite Sekante der Kurve aus. Auf ihr liegen unendlich viele Paare konjugierter Pole, welche eine hyperbolische Involution bilden.

e) Die Gerade liegt auf einer Fläche des Büschels, hat aber mit keiner andern einen Punkt gemeinschaftlich; sie ist eine uneigentliche Sekante. Sie enthält unendlich viele Paare konjugierter Pole, und diese bilden eine elliptische Involution.

f) Die Gerade ist Tangente an die Schnittkurve und liegt somit auf einer Fläche des Büschels. Sie ist gemeinsame Polare zu ihrem Berührungspunkte, und die Polaren zu ihren übrigen Punkten gehen durch diesen Punkt hindurch.

10) Welche von den in 9) angegebenen Fällen sind noch möglich, falls die Flächen des Büschels keinen Punkt gemeinschaftlich haben?

11) a) Nachdem eine gerade Linie gegeben ist, auf welcher unendlich viele zu einander konjugierte Punktepaare liegen, sollen alle andern geraden Linien bestimmt werden, denen dieselbe Eigenschaft zukommt und die mit der gegebenen Geraden einen Punkt gemein haben.

b) Welche Fläche wird von diesen geraden Linien erzeugt?

c) In welchen Teilen des Raumes liegen für den in 4) behandelten Fall die sämtlichen derartigen Geraden?

d) Durch welche Punkte geht nur eine einzige derartige Gerade?

e) Durch welche Punkte lassen sich unendlich viele gerade Linien legen, denen die angegebene Eigenschaft zukommt?

f) In welcher Beziehung stehen die hier betrachteten Geraden zu der Grundkurve des Büschels?

12) a) Die Determinante (10), durch deren Verschwinden die vier Kegel eines Flächenbüschels bestimmt werden, wird bei Einführung neuer Koordinaten nur mit einem konstanten Faktor multipliziert.

(Man beweise diesen Satz entweder rein begrifflich oder leite ihn aus einem bekannten Determinantensatze her.)

b) Man bestimme die geometrische Bedeutung für das Verschwinden des Koefficienten von ω in der Gleichung (10).

(Man kann davon ausgehen, daſs dieser Koefficient auf die Form gebracht werden kann $\Sigma b_{ik} A_{ik}$, wo A_{ik} die zu a_{ik} gehörende Unterdeterminante ist, und dann Übung 9 von § 23 beachten. Ebenso leicht ist es, ein neues Koordinatensystem so zu wählen, daſs die Koefficienten a_{ik} bis auf a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44} verschwinden und daſs zugleich $b_{11} = b_{22} = b_{33} = 0$ wird.)

c) Man soll die geometrische Bedeutung für das Verschwinden des Koefficienten von ω^3 in der Gleichung (10) bestimmen.

d) Einer Fläche zweiter Ordnung A sei ein Polartetraeder einer zweiten Fläche B eingeschrieben; ist jetzt auch notwendig der Fläche B ein Polartetraeder von A eingeschrieben?

e) Man suche die geometrische Bedeutung für das Verschwinden des Koefficienten von ω^2 in der Gleichung (10).

(Sobald es ein Polartetraeder der zweiten Fläche giebt, deren Kanten die erste Fläche berühren, wird jener Koefficient gleich null. Das erkennt man, indem man die Flächen auf ein solches System bezieht und berücksichtigt, daſs die Gleichung

$$a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

befriedigt wird, wofern die Axe $x_3 = x_4 = 0$ die erste Fläche berührt. Umgekehrt kann man ein Polartetraeder der zweiten Fläche immer so wählen, daſs fünf seiner Kanten Tangenten an die erste Fläche sind; indem man dies Tetraeder für die Bestimmung der Koordinaten benutzt, kann der genannte Koefficient nur verschwinden, wenn auch die sechste Kante von der ersten Fläche berührt wird. Demjenigen, welcher mit der Plückerschen Geradenkoordinaten vertraut ist, muſs geraten werden, den Beweis mit ihrer Hilfe zu erbringen.)

f) Wenn eine Fläche zweiter Ordnung durch die Kanten eines Polartetraeders einer zweiten Fläche berührt wird, so giebt es auch Polartetraeder der ersten Fläche, deren Kanten sämtlich Tangenten an die zweite Fläche sind.

13) Durch die Spitzen der zwölf Kegel, welche sich durch die Schnittkurve je zweier von drei Flächen zweiter Ordnung legen lassen, geht eine einzige Fläche zweiter Ordnung hindurch.

Es seien $\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$, $\Sigma b_{ik} x_i x_k = 0$, $\Sigma c_{ik} x_i x_k = 0$ die Gleichungen der drei Flächen. Soll die Fläche $\Sigma l_{ik} x_i x_k = 0$ um das allen Flächen $\Sigma (\lambda a_{ik} + \mu b_{ik}) x_i x_k = 0$ gemeinsame

Polartetraeder beschrieben sein, so muſs der Koefficient von ω in der Determinante

$$\Sigma \pm (\lambda a_{11} + \mu b_{11} + \omega l_{11})(\lambda a_{22} + \mu b_{22} + \omega l_{22}) \\ (\lambda a_{33} + \ldots)(\lambda a_{44} + \ldots)$$

für alle Werte von λ und μ verschwinden. Dieser Ausdruck ist aber von der Form: $\lambda^3 C_0 + \lambda^2\mu C_1 + \lambda\mu^2 C_2 + \mu^3 C_3 = 0$.

In ähnlicher Weise drückt man die Bedingung dafür, daſs die Fläche $\Sigma l_{ix} x_i x_x = 0$ dem allen Flächen

$$\Sigma (\lambda a_{ix} + \nu c_{ix}) x_i x_x = 0$$

gemeinsamen Polartetraeder umgeschrieben ist, durch eine Gleichung von der Form aus:

$$\lambda^3 B_0 + \lambda^2\nu B_1 + \lambda\nu^2 B_2 + \nu^3 B_3 = 0,$$

und die Bedingung dafür, daſs sie durch die Eckpunkte des den Flächen $\Sigma(\mu b_{ix} + \nu c_{ix}) x_i x_x = 0$ gemeinsamen Polartetraeders geht, durch das identische Verschwinden der Gleichung

$$\mu^3 A_0 + \mu^2\nu A_1 + \mu\nu^2 A_2 + \nu^3 A_3 = 0$$

aus. Hier ist C_0 der Koefficient von $\lambda^3\omega$ in der aus $\lambda a_{ix} + \omega l_{ix}$ gebildeten Determinante, also gleich dem Ausdruck $\Sigma l_{ix} A_{ix}$, wo A_{ix} die zu a_{ix} gehörende Unterdeterminante ist.

Diese Erwägung zeigt uns, daſs ist:

$$C_0 = B_0,\ C_3 = A_0,\ B_3 = A_3.$$

Es bleiben somit neun lineare Gleichungen zur Bestimmung der Koefficienten l_{ix}.

§ 25.

Einige Flächenbüschel von speciellem Charakter.

1. Es kann nicht unsere Aufgabe sein, die verschiedenen Arten der Flächenbüschel zweiter Ordnung aufzuzählen; wir erachten es aber für notwendig, diejenigen Fälle kurz zu besprechen, in denen die Grundkurve einen ebenen Zweig enthält. Die einzigen ebenen Kurven, die auf einer Fläche zweiter Ordnung liegen können, sind der Kegelschnitt und die Gerade. Wir wollen daher diejenigen Büschel kurz behandeln, zu deren Grundkurve entweder ein Kegelschnitt oder eine Gerade gehört. Um aber auch hierbei nicht zu sehr ins Einzelne zu gehen, schlieſsen wir den Fall aus, daſs ein der Grundkurve angehörender Kegelschnitt in ein Geradenpaar zerfällt; wir wollen überhaupt ganz von dem

Falle absehen, dafs zur Grundkurve mehr als eine gerade Linie gehört.

2. Wie wir oben gesehen haben, geht durch jeden Punkt des Raumes, der nicht in der Grundkurve des Büschels liegt, eine einzige Fläche desselben hindurch. Wenn jetzt alle Flächen des Büschels einen Kegelschnitt gemeinschaftlich haben, so wählen wir einen beliebigen Punkt in der Ebene dieses Kegelschnitts, der nicht in ihm liegt, zur Bestimmung einer Fläche. Diese Fläche hat mit der Ebene des Kegelschnitts diese Kurve selbst und einen weiteren Punkt gemeinschaftlich; daher gehört ihr die Ebene selbst an. Sie ist somit ein Ebenenpaar oder eine Doppelebene. Im ersten Falle, den wir zuerst betrachten wollen, besteht die Grundkurve des Büschels aus den beiden Kegelschnitten, in denen eine beliebige Fläche desselben von den beiden Ebenen des Paares geschnitten wird. Die Punkte, welche die Schnittgerade der beiden Ebenen mit der ausgewählten Fläche gemein hat, müssen den beiden Kegelschnitten angehören.

Zwei in verschiedenen Ebenen liegende Kegelschnitte können also nur dann die Grundkurve für einen Flächenbüschel zweiter Ordnung bilden, wenn sie sich in zwei (reellen oder imaginären) Punkten der Schnittkante ihrer Ebenen treffen. Umgekehrt kann man durch zwei in verschiedenen Ebenen liegende Kegelschnitte, welche die Schnittgerade dieser Ebenen in denselben beiden Punkten schneiden, und einen beliebigen weiteren Punkt eine Fläche zweiter Ordnung legen. Statt nämlich die Fläche in der angegebenen Weise zu bestimmen, nehme man den gegebenen Punkt des Raumes, die beiden Punkte der Schnittgeraden und noch je drei Punkte auf jedem der beiden Kegelschnitte und lege durch diese neun Punkte, was immer möglich ist, eine Fläche zweiter Ordnung. Da diese Fläche mit jedem der beiden Kegelschnitte fünf Punkte gemein hat, geht sie durch die beiden Kegelschnitte hindurch. Es giebt also überhaupt eine Fläche zweiter Ordnung, welche der angegebenen Forderung genügt.

Um aber zu zeigen, dafs es nur eine einzige derartige Fläche giebt, legt man durch den Punkt des Raumes eine beliebige Ebene. Da diese jeden der beiden Kegelschnitte in zwei (reellen oder imaginären) Punkten schneidet, kennt man in ihr fünf Punkte der Fläche und somit einen Kegelschnitt, der ganz der Fläche an-

gehören muſs. Durch die beiden Kegelschnitte und den gegebenen Punkt geht also nur eine einzige Fläche zweiter Ordnung. Nur wenn der Punkt auf einer der beiden Ebenen gewählt wird, in denen die Kegelschnitte liegen, läſst sich diese Erwägung nicht anstellen. Dann muſs aber zur Fläche diejenige Ebene gehören, auf welcher der Punkt gewählt ist. In der andern Ebene kennt man als Punkte der Fläche die des zweiten Kegelschnittes und die Schnittlinie der Ebenen; also besteht die Fläche aus den beiden Ebenen. Somit ergiebt sich der Satz:

Sollen zwei Flächen zweiter Ordnung sich in zwei Kegelschnitten schneiden, so müssen diese zwei Punkte gemeinschaftlich haben; umgekehrt können zwei beliebige Kegelschnitte, welche die Kante ihrer Ebenen in denselben beiden Punkten treffen, zur Grundkurve eines Flächenbüschels zweiter Ordnung gewählt werden.

3. Um die gemeinsamen Polartetraeder zu finden, legen wir der Untersuchung das Ebenenpaar und eine beliebige weitere Fläche Φ zu Grunde. Zu der singulären Geraden g des Ebenenpaares bestimmen wir die reciproke Polare p in Bezug auf die Fläche Φ. Nun beschränken wir uns auf den Fall, daſs diese beiden Linien einander nicht schneiden, mit andern Worten, wir setzen die beiden Punkte, welche die singuläre Gerade mit den Flächen des Büschels gemein hat, als getrennt voraus. Jetzt schneidet die Polare p sowohl das Ebenenpaar wie die Fläche Φ in zwei Punkten; es giebt aber zwei Punkte α und α' auf p, die zu den beiden Paaren von Schnittpunkten harmonisch liegen. Diese Punkte α und α' sind zu zwei und somit zu allen Flächen des Büschels konjugierte Pole. Wählt man jetzt noch auf der singulären Geraden g zwei Punkte β und β', welche für Φ konjugierte Pole sind, so bilden die vier Punkte α, α', β, β' die Eckpunkte eines gemeinsamen Polartetraeders. Da man aber etwa den Punkt β auf der Geraden g noch willkürlich wählen kann, so gilt der Satz:

Wenn sich die Flächen eines Büschels in zwei Kegelschnitten schneiden, so besitzen sie eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Polartetraedern.

Hierbei ist vorausgesetzt, daſs die Kegelschnitte getrennte

(reelle oder imaginäre) Schnittpunkte haben und dafs keiner von ihnen in ein Geradenpaar oder eine Doppelgerade zerfällt.

4. Indem wir eines der gemeinschaftlichen Polartetraeder der Koordinatenbestimmung zu Grunde legen, erhalten die beiden ausgewählten Flächen die Gleichungen:

$$(1)\quad a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2 = 0,\quad b_1x_1^2 + b_2x_2^2 = 0.$$

Dem Büschel gehören die Flächen an, welche durch die Gleichungen dargestellt werden:

$$(2)\quad (a_1 + \lambda b_1)\,x_1^2 + (a_2 + \lambda b_2)\,x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2 = 0.$$

Für λ gleich $-a_1 : b_1$ und gleich $-a_2 : b_2$ enthält die Gleichung nur drei Quadrate; somit gehören dem Büschel neben dem Ebenenpaare noch zwei eigentliche Kegel an.

Jede der beiden Ebenen

$$x_3\sqrt{a_3} + x_4\sqrt{-a_4} = 0 \quad \text{und} \quad x_3\sqrt{a_3} - x_4\sqrt{-a_4} = 0$$

berührt die sämtlichen Flächen des Büschels in den Schnittpunkten mit der Geraden $x_1 = x_2 = 0$.

Wenn die Grundkurve eines Büschels aus zwei Kegelschnitten besteht, so berühren seine Flächen einander in den beiden Punkten, in denen sich die beiden Kegelschnitte treffen

5. Wir gehen jetzt zu dem Falle über, dafs dem Büschel eine Doppelebene angehört, beschränken uns aber dabei auf solche Büschel, deren Flächen nicht von derselben Ebene berührt werden. Zur Bestimmung des Büschels wählen wir aufser der Doppelebene E noch eine beliebige Fläche Φ. Der Pol der Ebene E in Bezug auf die Fläche Φ liegt bei unserer Annahme nicht in dieser Ebene. Demnach ist jedes Polartetraeder von Φ, welches die Ebene E zu der einen Seite hat, ein gemeinsames Polartetraeder des Büschels; die gemeinsamen Polartetraeder bilden eine dreifach unendliche Mannigfaltigkeit. Die Gleichungen der Fläche können wir in der Form schreiben:

$$(3)\quad (a_1 + \lambda)\,x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2 = 0.$$

Zu ihnen gehört die Doppelebene und der Kegel

$$a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2 = 0.$$

Die Flächen haben einen Kegelschnitt gemein und berühren einander längs desselben.

6. Wenn die dem Büschel angehörende Doppelebene die

unendlichferne Ebene ist und diese die Flächen nicht berührt, so dürfen wir die Gleichung des Büschels in der Form voraussetzen:

$$(4)\quad \frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}+\frac{z^2}{\gamma}=\lambda.$$

Man sagt, alle diese Flächen wären ähnlich und hätten ähnliche Lage. Der gemeinsame Mittelpunkt kann als der Ähnlichkeitspunkt aufgefafst werden; das Ähnlichkeitsverhältnis derjenigen beiden Flächen, welche zu den Parametern λ und λ' gehören, ist gleich $\sqrt{\lambda:\lambda'}$, also reell oder imaginär, jenachdem λ und λ' dasselbe oder verschiedenes Vorzeichen haben. Die Flächen des Büschels haben auch alle Tripel von konjugierten Durchmessern gemeinschaftlich.

Auch die Schnittkurven mit einer beliebigen Ebene bilden ein System von ähnlichen Kurven, die denselben Mittelpunkt und dieselben Paare von konjugierten Durchmessern besitzen. Ebenso haben die auf denselben Geraden liegenden Sehnen denselben Punkt zur Mitte.

Jede Ebene, welche nicht durch den gemeinschaftlichen Mittelpunkt geht, wird von einer Fläche des Büschels berührt, nämlich von derjenigen Fläche, welche durch den gemeinschaftlichen Mittelpunkt der Schnittkurven geht. Ebenso giebt es eine einzige Fläche des Büschels, welche von einer beliebig gewählten Geraden berührt wird.

7. Die Büschel der ähnlichen konzentrischen Flächen zerfallen in zwei Arten, jenachdem die unendlichferne Ebene mit den Flächen einen imaginären oder einen reellen Kegelschnitt gemein hat. Im ersten Falle dürfen wir die Gleichung in der Form schreiben:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\lambda.$$

Die Flächen sind entweder Ellipsoide oder imaginäre Flächen, jenachdem der Parameter λ positiv oder negativ ist.

In dem Falle, dafs die Flächen dieselbe unendlichferne reelle Kurve, also einen gemeinschaftlichen reellen Asymptotenkegel haben, können wir die Gleichung zu Grunde legen:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\lambda.$$

Diese Gleichung stellt für positive Werte von λ einschalige, für negative Werte zweischalige Hyperboloide dar. Demnach liegen die einschaligen Hyperboloide des Büschels aufserhalb, die zweischaligen innerhalb des Asymptotenkegels.

8. Wir gehen jetzt zu dem Falle über, dafs die Flächen des Büschels eine gerade Linie gemeinschaftlich haben.

Indem wir diese gerade Linie zur Schnittlinie der Ebenen $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ wählen, müssen die beiden Gleichungen (3) § 24, 2 (S. 179) für $x_1 = x_2 = 0$ und beliebige Werte von x_3 und x_4 befriedigt werden. Daher ist

$$a_{33} = a_{34} = a_{44} = 0, \quad b_{33} = b_{34} = b_{44} = 0,$$

die Determinante (10) § 24, 7 geht somit über in

$$(5) \quad \{(a_{13} + \lambda b_{13})(a_{24} + \lambda b_{24}) - (a_{14} + \lambda b_{14})(a_{23} + \lambda b_{23})\}^2 = 0.$$

Dem Büschel gehören nur zwei Kegel an. Wir wollen annehmen, dafs die beiden Werte von λ, welche dieser Gleichung genügen, verschieden sind. Die Spitze $(\xi_1 \ldots \xi_4)$ desjenigen Kegels, welcher zu dem Wurzelwerte λ' gehört, wird vermittelst der Gleichungen gefunden:

$$\begin{aligned}
&(a_{11} + \lambda' b_{11})\xi_1 + (a_{12} + \lambda' b_{12})\xi_2 \\
&\qquad + (a_{13} + \lambda' b_{13})\xi_3 + (a_{14} + \lambda' b_{14})\xi_4 = 0 \\
&(a_{21} + \lambda' b_{21})\xi_1 + (a_{22} + \lambda' b_{22})\xi_2 \\
&\qquad + (a_{23} + \lambda' b_{23})\xi_3 + (a_{24} + \lambda' b_{24})\xi_4 = 0 \\
&(a_{31} + \lambda' b_{31})\xi_1 + (a_{32} + \lambda' b_{32})\xi_2 = 0 \\
&(a_{41} + \lambda' b_{41})\xi_1 + (a_{42} + \lambda' b_{42})\xi_2 = 0.
\end{aligned}$$

Da λ' eine Wurzel der Gleichung (5) ist, so kann man aus den beiden ersten Gleichungen ξ_3 und ξ_4 eliminieren. Aus der übrigbleibenden Gleichung folgt, dafs $\xi_1 = \xi_2 = 0$ sein mufs. (Wie kann man dies unmittelbar aus der Eigenschaft des Kegels herleiten?) Daher liegen die Spitzen der beiden Kegel in der gemeinschaftlichen Geraden.

Um die Koordinaten in passender Weise zu wählen, setze ich fest, dafs der erste Kegel längs der gemeinschaftlichen Erzeugenden von der Ebene $x_1 = 0$ und der zweite Kegel längs derselben Geraden von der Ebene $x_2 = 0$ berührt werde. Die Ebene $x_3 = 0$ trifft den ersten Kegel noch in einer zweiten Geraden; die Ebene, welche längs dieser Geraden berührt, wird zur Ebene $x_3 = 0$ gewählt. Ebenso schneidet die Ebene $x_1 = 0$ den zweiten Kegel noch in einer zweiten Geraden; die Ebene $x_4 = 0$ möge

längs dieser Linie berühren. Nach diesen Festsetzungen und bei geeigneter Wahl der noch vorhandenen Konstanten werden die Gleichungen der beiden Kegel:

$$(6)\quad x_1 x_3 - x_2^2 = 0,\ x_2 x_4 - x_1^2 = 0.$$

9. Hiernach haben die Flächen des Büschels die Gleichungen:

$$(7)\quad x_1^2 - x_2 x_4 + \lambda (x_2^2 - x_1 x_3) = 0.$$

Indem wir diese Gleichung den im vorigen Paragraphen durchgeführten Untersuchungen zu Grunde legen, erhalten wir folgende Resultate:

Nur die beiden Punkte $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ und $x_1 = x_2 = x_4 = 0$ haben dieselben Polarebenen, und diese berühren, da die Punkte auf den Flächen liegen, die sämtlichen Flächen. Jede dieser beiden Ebenen berührt einen der beiden Kegel, der dem Büschel angehört, und schneidet den andern in zwei geraden Linien.

10. Da jede Ebene mit der Grundkurve des Büschels vier Punkte gemein hat und einer von ihnen der geraden Linie angehört, so schneidet eine Ebene den übrigbleibenden Teil der Grundkurve in drei Punkten. Somit haben die Flächen des Büschels eine gerade Linie und eine Raumkurve dritter Ordnung gemeinschaftlich.

Die Flächen des Büschels sind geradlinig, weil jede Fläche zweiter Ordnung, in der eine gerade Linie liegt, unendlich viele Gerade enthält. Legen wir jetzt durch einen beliebigen Punkt des Raumes, der nicht in der Grundkurve liegt, eine Fläche des Büschels und ziehen wir von ihm aus diejenige auf derselben liegende Gerade, welche zu derselben Schar gehört wie die gegebene Gerade, so liegen ihre Schnittpunkte mit einer beliebigen zweiten Fläche des Büschels auf der Grundkurve, und zwar auf der Raumkurve dritter Ordnung, da die gezogene Gerade mit der gegebenen keinen Punkt gemeinschaftlich hat. Somit kann man an eine Raumkurve dritter Ordnung von jedem Punkte aus, der ihr nicht angehört, eine einzige Sekante ziehen.

11. Schliefsen wir die Punkte der Geraden $x_1 = x_2 = 0$ aus den Gleichungen (6) aus, so dürfen wir sie durch x_1 und x_2 dividieren. Die Punkte der Raumkurve genügen daher den Gleichungen:

$$(8)\quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \frac{x_4}{x_1}.$$

Die Raumkurve liegt also auch auf der Fläche:

$$(9) \quad x_1 x_2 - x_3 x_4 = 0,$$

welche dem gegebenen Büschel nicht angehört. Da diese Fläche die Raumkurve dritter Ordnung, nicht aber die Gerade $x_1 = x_2 = 0$ enthält, aber die Punkte $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ und $x_1 = x_2 = x_4 = 0$ auch auf der Fläche liegen, so geht auch die Raumkurve durch die beiden Punkte, die gemeinschaftlichen Berührungspunkte der Flächen. Die Gerade ist eine Sekante der Raumkurve, oder die Flächen des Büschels schneiden sich in einer Raumkurve dritter Ordnung und einer Sekante derselben.

Auch die beiden Flächen $x_1^2 - x_2 x_4 = 0$ und $x_1 x_2 - x_3 x_4 = 0$ bestimmen einen Büschel. Wie man leicht sieht, ist die Grundkurve desselben die Raumkurve dritter Ordnung nebst der Geraden $x_1 = x_3 = 0$, einer Tangente der Kurve. Diesem Büschel gehört ein einziger Kegel an; nur die Spitze desselben hat in Bezug auf alle Flächen des Büschels dieselbe Polarebene.

Durch die Raumkurve dritter Ordnung gehen alle Flächen, die durch die Gleichung dargestellt werden können:

$$(10) \quad \alpha (x_1^2 - x_2 x_4) + \beta (x_2^2 - x_1 x_3) + \gamma (x_1 x_2 - x_3 x_4) = 0.$$

Damit diese Gleichung einen Kegel darstellt, mufs $\alpha\beta = \gamma^2$ sein; durch die Kurve lassen sich unendlich viele Kegel zweiter Ordnung legen. Es ist nicht schwer zu zeigen, dafs jeder Punkt der Kurve zur Spitze eines Kegels gewählt werden kann.

12. Die Gleichungen (6) werden für jeden beliebigen Wert von t befriedigt, wenn man setzt:

$$(11) \quad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = t : t^2 : t^3 : 1.$$

Zugleich genügt man hierdurch den Gleichungen (6) und (9). Nun wird durch diese Verhältnisse jedem Werte von t ein einziger Punkt zugeordnet. Die Gleichungen stellen also die Raumkurve dar, welche den Flächen des Büschels neben der Geraden $x_1 = x_2 = 0$ gemeinsam ist.

Die Schnittpunkte der Kurve mit der Ebene

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4 = 0$$

ergeben sich aus der Gleichung:

$$(12) \quad c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 = 0.$$

Wie diese Gleichung zeigt, hat jede Ebene mit der Raumkurve drei Punkte gemeinschaftlich; sie ist, wie wir bereits oben gesehen haben, von der dritten Ordnung.

Übungen:

1) a) Welche verschiedenen Fälle sind je nach der Wahl der Koefficienten $a_1 \ldots a_4$, b_1, b_2 in den Gleichungen (1) in Bezug auf die Realität der Kegelschnitte und ihrer Schnittpunkte möglich?

b) Können auch zwei von den Koordinatenebenen imaginär sein?

2) a) Durch zwei Kegelschnitte, die in verschiedenen Ebenen liegen, aber zwei Punkte gemein haben, lassen sich zwei Kegel legen. Auf welcher Geraden liegen die Scheitel dieser Kegel? Wie findet man auf dieser Geraden die Scheitel selbst?

b) Unter der Annahme, dafs die Kegelschnitte und ihre Schnittpunkte reell sind, soll angegeben werden, in welche Teile der Raum zerlegt wird, in welchen Teilen die geradlinigen, in welchen die ungeradlinigen Flächen des Büschels liegen.

c) Giebt es eine Ebene, in welcher die gemeinsame Polare zu jedem ihrer Punkte liegt?

d) Welche Ebenen schneiden aus dem Flächenbüschel einen speciellen Kegelschnittsbüschel aus, für den es unendlich viele gemeinsame Polardreiecke giebt?

3) a) Alle Flächen zweiter Ordnung, welche von einem gegebenen Kegel längs seiner Schnittlinie mit einer festen Ebene berührt werden, bilden einen Büschel.

b) Durch jede Gerade, welche von einem Punkte π des Kegelschnitts aus in der im Punkte π den Kegel berührenden Ebene gezogen werden kann, geht eine Fläche des Büschels.

c) Durch jeden Punkt aufserhalb des Kegels geht eine geradlinige Fläche des Büschels.

d) Man konstruiere nach b) diejenigen beiden Geraden, welche von einem gegebenen Punkte des Raumes ausgehen und einer Fläche des Büschels angehören.

e) Eine Gerade, welche von einem Punkte des Kegelschnitts ausgeht, ohne in der Tangentialebene an den Kegel zu liegen, hat mit jeder andern Fläche des Büschels noch einen Punkt gemein.

f) Im allgemeinen wird eine gerade Linie von einer einzigen Fläche des Büschels berührt. Wie liegen die Schnittpunkte der Geraden mit einer beliebigen Fläche des Büschels diesem Berührungspunkte und dem Schnittpunkte mit der Ebene gegenüber?

g) Man untersuche speciell die Geraden, welche durch den Scheitel des Kegels hindurchgehen.

4) Will man von dem Falle, dafs die Flächen des Büschels zwei Kegelschnitte gemein haben, zu dem Falle übergehen, wo sie sich längs eines Kegelschnittes berühren, so verzeichne man die beiden Kegelschnitte auf demselben Kegel, drehe die Ebene des einen um die gemeinsame Kante und lasse sie dabei der andern (festen) Ebene immer näher kommen. Wie ändert bei dieser Drehung die Spitze des zweiten Kegels ihre Lage? Man gebe die Änderungen an, welche die für den allgemeineren Büschel geltenden Sätze hierbei erleiden.

5) a) Ein Büschel von ähnlichen und ähnlich liegenden Flächen zweiter Ordnung wird von jeder Ebene in einem Büschel ähnlicher Kurven geschnitten.

b) Jede Ebene wird von einer einzigen Fläche dieses Büschels berührt.

6) Wenn man durch den Schnitt zweier Ebenen mit einer gegebenen Fläche zweiter Ordnung eine zweite derartige Fläche legt, welche durch den Pol der ersten Ebene in Bezug auf die gegebene Fläche geht, so liegt auf ihr auch der Pol der zweiten Ebene.

7) Zwei Flächen zweiter Ordnung können nicht in drei Punkten dieselben Tangentialebenen besitzen, ohne dafs sie einander längs einer ebenen Kurve berühren.

8) Wenn zwei Flächen zweiter Ordnung von derselben Fläche je längs eines Kegelschnittes berührt werden, so schneiden sie einander in ebenen Kurven.

(Die gegebenen Flächen können in der Form dargestellt werden: $H - L^2 = 0$, $H - M^2 = 0$, wo H eine quadratische, L und M lineare Formen in $x_1 \ldots x_4$ sind; daher liegen ihre Schnittlinien in den Ebenen $L - M = 0$ und $L + M = 0$.)

9)—16) Übungen über kubische Raumkurven.

9) Man zeige, dafs jeder Punkt einer kubischen Raumkurve zur Spitze eines Kegels gewählt werden kann, auf dem die Kurve liegt.

a) Man gehe von der Gleichung (10) aus, nehme einen Punkt (x') so an, dafs die Gleichungen (8) befriedigt werden, und wähle

die Koefficienten α, β, γ so, daſs die Ableitungen der Gleichung (10) für den Punkt (x′) verschwinden.

b) Man gebe der Variabeln t in (11) einen festen Wert τ, nenne (x′) die dazu gehörenden Werte von (x), ziehe die Gerade von (x′) nach dem Punkte, der zu einem willkürlichen Werte von t gehört, und zeige, daſs die Gerade bei Veränderung von t einen Kegel zweiter Ordnung beschreibt.

10) a) Jede kubische Raumkurve, welche auf einer Fläche zweiter Ordnung liegt, schneidet die Erzeugenden der einen Schar in einem Punkte, die der andern Schar in zwei (reellen oder imaginären) Punkten.

b) Zwei verschiedene Tangenten einer kubischen Raumkurve können einander nicht schneiden.

c) Der Schnittpunkt von zwei verschiedenen Sekanten gehört der Kurve an.

11) a) Wenn eine Fläche zweiter Ordnung sieben Punkte mit einer kubischen Raumkurve gemeinschaftlich hat, so enthält sie dieselbe ganz.

b) Wenn zwei kubische Raumkurven fünf Punkte gemein haben, so liegen sie auf demselben Hyperboloid.

12) a) Sind drei Ebenenbüschel projektiv auf einander bezogen, so erzeugen die Schnittpunkte entsprechender Ebenen eine Raumkurve dritter Ordnung.

(Es seien $A + \lambda B = 0$, $C + \lambda D = 0$, $E + \lambda G = 0$ die Gleichungen der Büschel; alle Punkte, welche den Flächen $AD = BC$ und $AG = BE$ angehören, ohne in der Geraden $A = B = 0$ zu liegen, gehören auch der Fläche $CG = DE$ an.)

b) Die erzeugte Kurve hat zu Sekanten die Axen der drei Ebenenbüschel.

c) Sind α, β, γ, δ, ε, ζ beliebige feste Konstante, so darf man statt der eben genannten Büschel die folgenden zu Grunde legen:

$$(A + \alpha C + \beta E) + \lambda (B + \alpha D + \beta G) = 0,$$
$$(A + \gamma C + \delta E) + \lambda (B + \gamma D + \delta G) = 0,$$
$$(A + \varepsilon C + \zeta E) + \lambda (B + \varepsilon D + \zeta G) = 0.$$

d) Man kann erreichen, daſs die Gleichungen $B + \alpha D + \beta G = 0$ und $A + \gamma C + \delta E = 0$, sowie $B + \varepsilon D + \zeta G = 0$ und $A + \alpha C + \beta E = 0$ je dieselbe Ebene darstellen. Dadurch gelangen wir zu der Erzeugung (8).

e) Man weise direkt nach, daſs durch jeden Punkt des Raumes eine Gerade geht, welche zur Axe eines Ebenenbüschels gewählt werden darf.

13) a) Man soll beliebig viele Punkte einer kubischen Raumkurve konstruieren, von der sechs Punkte gegeben sind.

Sind $\pi_1 \ldots \pi_6$ die gegebenen Punkte, und will man den dritten Punkt in einer beliebigen durch $\pi_1\pi_2$ gelegten Ebene E finden, so konstruiere man nach dem Pascalschen Satze die dieser Ebene angehörende Gerade des Kegels, der π_1 zum Scheitel hat und durch $\pi_2 \ldots \pi_6$ geht. Ebenso verfahre man für den Kegel, der π_2 zur Spitze hat und die fünf andern Punkte enthält.

b) Eine kubische Raumkurve zu konstruieren, die durch fünf gegebene Punkte ($\pi_1 \ldots \pi_5$) geht und eine gegebene Gerade l zur Sekante hat.

Die Punkte π_1, π_2, π_3 vermitteln eine projektive Zuordnung der Büschel um l und um $(\pi_4\pi_5)$, also ein Hyperboloid; dasselbe gilt für die Punkte π_1, π_2, π_4 und die Büschel um l und $(\pi_3\pi_5)$.

c) Man löse die entsprechenden Aufgaben, falls vier Punkte und zwei Sekanten, drei Punkte und drei Sekanten, zwei Punkte und vier Sekanten oder ein Punkt und fünf Sekanten gegeben sind.

d) Von einem beliebigen Punkte des Raumes die Sekante an eine durch sechs gegebene Punkte gehende Raumkurve dritter Ordnung zu legen.

14) a) Schmiegungsebene einer Raumkurve heiſst diejenige Ebene, welche mit ihr drei zusammenfallende Punkte gemein hat. (Wie läſst sich diese Definition schärfer aufstellen?)

Soll die Ebene $c_1x_1 + \ldots + c_4x_4 = 0$ die Schmiegungsebene im Punkte $(t = \tau)$ sein, so muſs die Gleichung (12) die dreifache Wurzel τ haben; demnach ist die Gleichung der Schmiegungsebene:

$$3\tau^2x_1 - 3\tau x_2 + x_3 - \tau^3x_4 = 0.$$

b) Durch jeden Punkt (x') des Raumes gehen drei Schmiegungsebenen an die Raumkurve.

(Die entsprechenden Werte für τ sind die Wurzeln der Gleichung: $3\tau^2x_1' - 3\tau x_2' + x_3' - \tau_3x_4' = 0$.)

c) Durch jeden Punkt einer Tangente geht nur noch eine einzige Schmiegungsebene. Demnach ist die Bedingung dafür, daſs der Punkt (x) auf einer Tangente der Kurve liegt, identisch

mit der Bedingung, daſs die Gleichung in a) zwei gleiche Wurzeln hat. Die Tangenten der Kurve erzeugen eine abwickelbare Fläche vierter Ordnung. Man stelle ihre Gleichung auf.

15) a) Die Schmiegungsebenen in drei beliebigen Punkten α, β, γ der Raumkurve dritter Ordnung schneiden sich in einem Punkte der Ebene $\alpha\beta\gamma$.

b) Die Schmiegungsebenen schneiden eine beliebige feste Schmiegungsebene in geraden Linien, welche einen Kegelschnitt umhüllen.

c) Sind vier Punkte der Kurve beliebig gegeben, so sind die beiden Tetraeder, von denen das eine die vier Punkte zu Eckpunkten, das andere die in ihnen an die Kurve gelegten Schmiegungsebenen zu Seitenflächen hat, einander gleichzeitig ein- und umgeschrieben.

16) a) Die kubischen Raumkurven werden nach ihrer Lage zu der unendlichfernen Ebene in vier Arten eingeteilt:

α) die kubischen Ellipsen haben mit der unendlichfernen Ebene nur einen (reellen) Punkt gemein;

β) die kubischen Hyperbeln haben mit ihr drei verschiedene Punkte gemein;

γ) die kubische parabolische Hyperbel hat eine unendlichferne Tangente;

δ) die kubische Parabel hat die unendlichferne Ebene zur Schmiegungsebene.

b) Durch eine kubische Hyperbel gehen drei Cylinder, und diese sind sämtlich hyperbolisch; durch eine kubische Ellipse geht nur ein, und zwar ein elliptischer Cylinder. Durch eine parabolische Hyperbel kann man zwei Cylinder legen, von denen der eine hyperbolisch, der andere parabolisch ist. Durch eine kubische Parabel geht nur ein einziger Cylinder, der parabolisch ist.

c) Die kubische Ellipse hat im Endlichen nur eine einzige reelle Asymptote (Tangente im Unendlichfernen) und eine einzige reelle Asymptotenebene (Schmiegungsebene an einen unendlichfernen Punkt); die Asymptote liegt in der Asymptotenebene. Die kubische Hyperbel hat drei reelle Asymptoten und drei Asymptotenebenen. Die parabolische Hyperbel hat eine Asymptote und zwei Asymptotenebenen. Die kubische Parabel hat weder eine Asymptote noch eine Asymptotenebene.

d) Jede auf einem elliptischen Cylinder gelegene Raumkurve dritter Ordnung ist eine kubische Ellipse; mit andern Worten: Wenn ein Kegel und ein elliptischer Cylinder eine Erzeugende gemein haben, so ist ihre weitere Durchdringungskurve eine kubische Ellipse.

e) Für eine kubische Parabel läfst sich immer ein Kegel zweiter Ordnung derartig bestimmen, dafs jeder seiner Tangentialebenen zwei Schmiegungsebenen der Kurve parallel sind.

§ 26.

Die Flächenschar zweiter Klasse.

1. Um das Verständnis der folgenden Untersuchungen zu erleichtern, wollen wir an die im vorigen Paragraphen untersuchten Raumkurven dritter Ordnung anknüpfen. Von der Verbindungslinie zweier beliebiger Punkte der Kurve, der Sekante, werden wir auf die Tangente geführt, indem wir den einen Schnittpunkt mit der Kurve festhalten und den zweiten dem ersteren immer näher kommen lassen; die Grenzlage, welche die Sekante hierbei annimmt, nennen wir die Tangente der Kurve. Wir können durch eine feste Tangente und einen beliebigen Punkt der Kurve eine Ebene legen; indem wir diesen Punkt sich dem Berührungspunkte der Tangente unbegrenzt nähern lassen, erhält die Ebene eine bestimmte Grenzlage, welche als die Schmiegungsebene der Kurve bezeichnet wird. Wir sagen, die Schmiegungsebene habe drei unendlich nahe Punkte mit der Kurve gemeinschaftlich. Da wir in jedem Punkte der Kurve an sie die Schmiegungsebene legen können, werden wir von einer Raumkurve als einer stetigen Folge von Punkten durch die Konstruktion ihrer Tangenten und Schmiegungsebenen zu einer stetigen Folge von geraden Linien und von Ebenen geführt.

Die Folge der Tangenten einer Raumkurve hat eine ganz besondere Eigenschaft. Je mehr zwei Punkte der Kurve sich einander nähern, um so mehr fallen ihre Tangenten in dieselbe Ebene, die Schmiegungsebene; wir dürfen also sagen, zwei unendlich nahe Tangenten hätten einen Punkt gemein. Genauer können wir dies in folgender Weise darstellen. Eine stetige Folge von geraden Linien machen wir in der Weise von einem Parameter

t abhängig, dafs zu jedem Werte t eine einzige Linie gehört. Der Abstand der beiden zu den Parametern t_0 und $t_0 + h$ gehörenden Geraden ist dann eine Funktion von t_0 und von h, welche bei der Entwicklung nach Potenzen von h mit der ersten Potenz beginnt. Bei der Folge der Tangenten fängt aber die Entwicklung mit dem Quadrate von h an. Hiernach kann das zwischen zwei unendlich nahen Tangenten liegende Stück derjenigen geradlinigen Fläche, welche alle Tangenten einer Raumkurve enthält, als ein ebenes Winkelfeld betrachtet werden. Wir können daher alle diese Winkelfelder in dieselbe Ebene ausbreiten oder, wie wir uns ausdrücken, die Fläche selbst in die Ebene abwickeln. Die durch die Tangenten erzeugte Fläche ist somit (in eine Ebene) abwickelbar.

2. Umgekehrt können wir auch von einer stetigen Folge von Ebenen ausgehen. (Der Anfänger möge dabei die Schmiegungsebenen einer Raumkurve dritter Ordnung im Auge behalten.) Eine feste Ebene des Systems wird von jeder andern Ebene desselben in einer geraden Linie geschnitten. Je näher wir die zweite Ebene der ersten nehmen, um so mehr kommt die Schnittlinie an eine Grenzlage heran, welche als Schnitt von zwei unendlich nahen Ebenen aufgefafst werden kann und wieder als Tangente bezeichnet wird. Die in einer festen Ebene gelegene Tangente wird von jeder andern Ebene in einem einzigen Punkte geschnitten; dieser Punkt erhält auf der Tangente eine feste Grenzlage, je näher die zweite Ebene der ersten kommt; wie in der Tangente zwei, so treffen in diesem Punkte drei unendlich nahe Ebenen zusammen. Die Gesamtheit dieser Punkte bildet wieder eine stetige Folge, eine Raumkurve. Umgekehrt ist für diese Kurve jede Ebene des Systems eine Schmiegungsebene und jede Schnittlinie unendlich naher Ebenen des Systems eine Tangente.

3. Sobald daher eine Raumkurve in allen ihren Punkten Tangenten und Schmiegungsebenen besitzt, steht mit ihr eine abwickelbare Fläche als Erzeugnis ihrer Tangenten und eine einfach unendliche Schar von Ebenen in enger Beziehung. Diese Ebenen sind die Schmiegungsebenen der Kurve und die Tangentialebenen der abwickelbaren Fläche. Jede Tangentialebene hat mit der Fläche eine ihrer Erzeugenden gemeinschaftlich und berührt längs dieser Geraden. Umgekehrt kann jede einfach

unendliche Schar von Ebenen, falls der Schnitt von je zwei unendlich nahen Ebenen auf eine feste Gerade und der von drei unendlich nahen Ebenen auf einen festen Punkt führt, als die Gesamtheit der Schmiegungsebenen an eine Raumkurve und damit als die Tangentialebenen an eine abwickelbare Fläche betrachtet werden.

4. Wenn die Gleichungen

$$(1)\quad F(u_1 \ldots u_4) = 0,\ \Phi(u_1 \ldots u_4) = 0$$

in Ebenenkoordinaten zwei Flächen m^{ter} Klasse darstellen, so sagen wir, alle Flächen, welche bei beliebigem Werte von λ durch die Gleichung

$$(2)\quad F(u_1 \ldots u_4) + \lambda\Phi(u_1 \ldots u_4) = 0$$

dargestellt werden, gehören der durch die beiden ersten Flächen bestimmten Flächenschar m^{ter} Klasse an.

Jedes Wertsystem $(u_1 \ldots u_4)$, welches den beiden Gleichungen (1) genügt, befriedigt auch die Gleichungen (3); daher wird jede Fläche der Schar von allen denjenigen Ebenen berührt, welche gemeinsame Tangentialebenen an die beiden gegebenen Flächen sind. Dagegen läfst sich für ein Wertsystem (u), für das die beiden Gleichungen (1) nicht befriedigt werden, nur ein einziger Wert λ finden, welcher der Gleichung (2) genügt. Jede Ebene des Raumes wird also von einer einzigen Fläche der Schar berührt.

Die gemeinsamen Tangentialebenen bilden in dem vorhin erläuterten Sinne eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit; sie sind Schmiegungsebenen an eine gewisse Raumkurve und Tangentialebenen an eine abwickelbare Fläche.

Durch jeden Punkt des Raumes gehen, wie die Algebra lehrt, m^2 Ebenen des Systems hindurch.

5. Eine Flächenschar zweiter Klasse wird durch zwei Flächen zweiter Klasse

$$(3)\quad \Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota u_\varkappa = 0,\ \Sigma B_{\iota\varkappa} u_\iota u_\varkappa = 0$$

bestimmt und umfafst alle Flächen, deren Gleichung ist:

$$(4)\quad \Sigma(A_{\iota\varkappa} + \lambda B_{\iota\varkappa}) u_\iota u_\varkappa = 0.$$

Der Pol der Ebene (u') in Bezug auf die Fläche (4) hat die Gleichung:

$$(5)\quad \Sigma(A_{\iota\varkappa} + \lambda B_{\iota\varkappa}) u_\iota' u_\varkappa = 0;$$

er liegt, wie man aus dieser Gleichung unmittelbar ersieht, in

gerader Linie mit den Polen derselben Ebene in Bezug auf die Flächen (3). Somit gilt der Satz:

Die Pole einer festen Ebene in Bezug auf alle Flächen einer Schar zweiter Klasse füllen eine gerade Linie an.

Jede Ebene, welche durch diese gerade Linie geht, ist gemeinsame Polarebene für alle Flächen der Schar. Somit ordnet die Schar einer jeden Ebene eine bestimmte gerade Linie zu; in dieser Geraden schneiden sich die gemeinsamen Polarebenen zu der gegebenen Ebene, und in ihr liegen die Pole dieser Ebene in Bezug auf die Flächen der Schar.

6. Wir fragen uns jetzt, ob eine Ebene (u') in Bezug auf alle Flächen der Schar denselben Pol besitzen kann, oder mit andern Worten, ob für ein Wertsystem (u') die Gleichung (5) denselben Punkt darstellt, welchen Wert man auch dem Parameter λ beilegen mag. Dieser Ausnahmefall wird eintreten, sobald sich die Gleichungen

$$\Sigma A_{ik} u_i' u_k = 0 \text{ und } \Sigma B_{ik} u_i' u_k = 0$$

nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden. Es muſs sich also eine Gröſse ω_1 so bestimmen lassen, daſs die vier Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned}(6)\quad &(A_{11} - \omega_1 B_{11})\, u_1' + (A_{12} - \omega_1 B_{12})\, u_2' \\ &+ (A_{13} - \omega_1 B_{13})\, u_3' + (A_{14} - \omega_1 B_{14})\, u_4' = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &(A_{41} - \omega_1 B_{41})\, u_1' + (A_{42} - \omega_1 B_{42})\, u_2' \\ &+ (A_{43} - \omega_1 B_{43})\, u_3' + (A_{44} - \omega_1 B_{44})\, u_4' = 0.\end{aligned}$$

Damit diese Gleichungen befriedigt werden können, muſs ω_1 eine Wurzel der Gleichung sein:

$$(7)\quad \begin{vmatrix} A_{11} - \omega B_{11} & A_{12} - \omega B_{12} & A_{13} - \omega B_{13} & A_{14} - \omega B_{14} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{41} - \omega B_{41} & A_{42} - \omega B_{42} & A_{43} - \omega B_{43} & A_{44} - \omega B_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Sobald zwischen den Koefficienten A_{ik} und B_{ik} keine besonderen Beziehungen bestehen, hat diese Gleichung vier verschiedene Wurzeln $\omega_1 \ldots \omega_4$, und zu jeder gehört ein den Gleichungen (6) genügendes Wertsystem (u'). Im allgemeinen Falle, auf den wir uns im folgenden beschränken, giebt es somit vier reelle oder imaginäre Ebenen, welche in Bezug auf alle Flächen der Schar je denselben Pol besitzen.

7. Zur Wurzel ω_1 von (7) möge die Ebene (u'), zur Wurzel ω_2 die Ebene (u'') gehören u. s. w. Alsdann ordnen sich den Gleichungen (6) die Gleichungen zu:

$$(8)\quad \begin{aligned}&(A_{11} - \omega_2 B_{11})\, u_1'' + (A_{12} - \omega_2 B_{12})\, u_2'' \\ &\quad + (A_{13} - \omega_2 B_{13})\, u_3'' + (A_{14} - \omega_2 B_{14})\, u_4'' = 0\end{aligned}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{aligned}&(A_{41} - \omega_2 B_{41})\, u_1'' + (A_{42} - \omega_2 B_{42})\, u_2'' \\ &\quad + (A_{43} - \omega_2 B_{43})\, u_3'' + (A_{44} - \omega_2 B_{44})\, u_4'' = 0.\end{aligned}$$

Indem wir die Gleichungen (6) der Reihe nach mit $u_1'' \ldots u_4''$ multiplizieren, ergiebt sich durch Addition die neue Gleichung:

$$\Sigma A_{\iota\varkappa}\, u_\iota'\, u_\varkappa'' - \omega_1 \Sigma B_{\iota\varkappa}\, u_\iota'\, u_\varkappa'' = 0.$$

Ebenso leitet man aus den Gleichungen (8) durch Multiplikation mit $u_1' \ldots u_4'$ die Beziehung her:

$$\Sigma A_{\iota\varkappa}\, x_\iota'\, u_\varkappa'' - \omega_2 \Sigma B_{\iota\varkappa}\, u_\iota'\, u_\varkappa'' = 0.$$

Da die Wurzeln ω_1 und ω_2 von einander verschieden sein sollen, können die beiden letzten Gleichungen nur dann mit einander bestehen, wenn ist:

$$\Sigma A_{\iota\varkappa}\, u_\iota'\, u_\varkappa'' = 0, \quad \Sigma B_{\iota\varkappa}\, u_\iota'\, u_\varkappa'' = 0.$$

Daher sind die Ebenen (u') und (u'') konjugierte Polarebenen für alle Flächen der Schar. Da dasselbe für je zwei Ebenen gilt, welche auf die angegebene Weise gefunden werden, so bilden diese vier Ebenen ein gemeinsames Polartetraeder.

Wofern zwischen den Koefficienten in den Gleichungen von zwei Flächen zweiter Klasse keine besonderen Beziehungen bestehen, besitzen die Flächen der durch sie bestimmten Schar ein gemeinsames Polartetraeder.

8. Soll die Fläche (3) eine Grenzfläche (ein Kegelschnitt) sein, so mufs die aus den Koefficienten in ihrer Gleichung gebildete Determinante verschwinden; es mufs daher sein:

$$(9)\quad \begin{vmatrix} A_{11} + \lambda B_{11} & \cdots & A_{14} + \lambda B_{14} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{41} + \lambda B_{41} & \cdots & A_{44} + \lambda B_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Daher enthält eine Schar von Flächen zweiter Klasse im allgemeinen vier Kegelschnitte.

Die Gleichung (9) geht in die Gleichung (7) über, wenn man λ mit $-\omega$ vertauscht; bei derselben Vertauschung liefern

auch die Gleichungen (6) die zugehörige singuläre Ebene. Daher hat jede Ebene, in der ein Kegelschnitt der Schar liegt, für alle ihre Flächen denselben Pol.

Eine Flächenschar zweiter Klasse enthält im allgemeinen vier Kegelschnitte, und die Ebenen der vier Kegelschnitte bilden das gemeinsame Polartetraeder für die Flächen der Schar.

9. Jede Ebene, für welche $u_4 = 0$ ist, geht durch einen Eckpunkt des Polartetraeders und schneidet die gegenüberliegende Koordinatenebene in einer Geraden, deren Koordinaten dasselbe Verhältnis haben wie die drei ersten Koordinaten der Ebene, falls man in der letzten Ebene das Koordinatendreieck und die Einheitsgerade passend wählt (§ 9, 5, S. 62). Nun stellt die Gleichung:

$$(10) \quad \Sigma (A_{\iota\varkappa} + \lambda B_{\iota\varkappa}) u_\iota u_\varkappa = 0, \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2, 3)$$

wofern man darin u_1, u_2, u_3 als Linienkoordinaten in einer Ebene auffaſst, eine Kurvenschar zweiter Klasse dar. Demnach bestimmt diese Gleichung in Verbindung mit $u_4 = 0$, sobald man die Gröſsen u_1, u_2, u_3 Ebenenkoordinaten sein läſst, eine Schar von Kegeln zweiter Klasse. Jeder von diesen ist aber Tangentialkegel an eine Fläche (4). Somit bilden alle von einem festen Punkte ausgehenden Tangentialkegel eine Schar von Kegeln.

10. Eine Kegelschar zweiter Klasse enthält im allgemeinen drei Strahlenpaare. Nun wissen wir, daſs ein Tangentialkegel an eine Fläche zweiter Klasse nur dann in ein Strahlenpaar übergeht, wenn seine Spitze auf der Fläche liegt. Daher können wir den vorangehenden Satz auch in folgender Weise aussprechen:

Durch jeden Punkt des Raumes gehen im allgemeinen drei Flächen, welche einer gegebenen Flächenschar zweiter Klasse angehören.

Die drei Berührungsebenen bilden für die Kegelschar ein sich selbst konjugiertes Dreikant; somit ist auch jede seiner Ebenen konjugierte Polarebene zu allen Ebenen, welche durch die gegenüberliegende Kante gelegt werden können. Zu einer beliebigen, durch einen festen Punkt gelegten Ebene giebt es im allgemeinen eine einzige, für alle Flächen der Schar gemeinsame Polarebene, welche durch den Punkt geht. Nur für drei Ebenen des Bündels gehen alle gemeinsamen Polarebenen durch den gegebenen Punkt; es sind dies die Tangentialebenen an die drei durch den Punkt

gehenden Flächen der Schar. Jede dieser drei Ebenen hat die Schnittlinie der beiden andern Berührungsebenen zur gemeinsamen Polaren.

11. Ein Kegelschnitt der Schar wird in einem jeden seiner Punkte von allen denjenigen Ebenen berührt, welche durch die in diesem Punkte an ihn gelegte Tangente hindurchgehen. Legen wir durch diese Tangente die beiden Tangentialebenen an irgend eine zweite Fläche der Schar, so sind diese allen ihren Flächen gemeinschaftlich. Die Ebene des Kegelschnitts hat also die besondere Eigenschaft, daſs in ihr unendlich viele Schnittlinien gemeinschaftlicher Tangentialebenen liegen; diese Linien umhüllen einen Kegelschnitt.

12. Wenn die Gerade g diesen Kegelschnitt im Punkte α berührt, so ist (nach § 10, 14, S. 76) der durch g gelegte Ebenenbüschel als specielle Art eines Tangentialkegels anzusehen. Wählt man den Punkt α zum Punkte (0, 0, 0, 1) für Ebenenkoordinaten v_1, v_2, v_3, v_4 und nimmt den Punkt (1, 0, 0, 0) in der Geraden g an, so wird dieser doppelt zu zählende Ebenenbüschel durch die Gleichungen dargestellt:

$$v_4 = 0, \quad v_1^2 = 0.$$

Jetzt lege man an eine beliebige Fläche der Schar vom Punkte α aus den Tangentialkegel und wähle die weiteren Koordinatenaxen so, daſs sie mit der Geraden g ein Tripel konjugierter Durchmesser für den Kegel sind. Dadurch erhalten wir für diesen Kegel die Gleichungen:

$$v_4 = 0, \quad a_1 v_1^2 + a_2 v_2^2 + a_3 v_3^2 = 0.$$

Die Schar sämtlicher Tangentialkegel, welche vom Punkte α aus an die Flächen gelegt werden können, läſst sich demnach durch die Gleichungen darstellen:

$$v_4 = 0, \quad \lambda v_1^2 + a_2 v_2^2 + a_3 v_3^2 = 0.$$

13. In Bezug auf den Kegelschnitt ist zu einer beliebigen durch g gelegten Ebene E jede durch α gehende Ebene konjugierte Polarebene. Ist jetzt ε der Pol von E in Bezug auf eine beliebig gewählte zweite Fläche der Schar, so ist jede durch die Gerade $\alpha\varepsilon$ gehende Ebene konjugierte Polarebene zu E für alle Flächen der Schar. Bei der Drehung von E um g beschreibt der Punkt ε die reciproke Polare von g. Daher beschreibt die Gerade $\alpha\varepsilon$ einen ebenen Strahlenbüschel, dessen Scheitel im

Punkte α liegt. Die vom Punkte α ausgehenden Tangentialkegel haben somit eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Polardreikanten; alle diese haben in der Tangente g eine gemeinsame Kante; die beiden andern Kanten liegen in einer festen Ebene; aber in dieser Ebene kann die eine Kante noch willkürlich gewählt werden.

14. Die Tangentialebenen, welche von einer beliebigen Geraden aus an die Flächen der Schar gelegt werden können, bilden eine Ebenen-Involution, deren Hauptebenen die Tangentialebenen an die beiden die Gerade berührenden Flächen der Schar sind. Diese beiden Tangentialebenen sind auch konjugierte Polarebenen in Bezug auf alle Flächen der Schar. Nur wenn die Gerade einer Fläche der Schar angehört, schneiden sich in ihr zwei gemeinsame Tangentialebenen; in diesem Falle gehen durch die Gerade unendlich viele Paare von Ebenen, welche einander in Bezug auf alle Flächen der Schar konjugiert sind.

Übungen:

1) a) Es giebt im allgemeinen vier Kegelschnitte, von denen acht gegebene Ebenen berührt werden.

b) Nachdem zwei Kegelschnitte im Raume gegeben sind, soll man diejenigen beiden Kegelschnitte konstruieren, welche mit den beiden ersten alle Tangentialebenen gemeinschaftlich haben.

(Man bestimme erst die Schnittlinie der Ebenen, in denen je einer der gesuchten Kegelschnitte liegt, dann die Ebenen selbst.)

2) a) Es giebt i. a. drei Flächen zweiter Ordnung, welche acht gegebene Ebenen berühren und durch einen festen Punkt gehen.

b) Wenn ein Punkt einem Kegelschnitte angehört, der acht gegebene Ebenen berührt, so geht durch ihn nur noch eine einzige weitere Fläche zweiter Klasse, die von den acht Ebenen berührt wird.

3) a) Die von einem Punkte ausgehenden Tangentialkegel an die Flächen einer Schar zweiter Klasse lassen sich i. a. in der Form darstellen:

$$v_4 = 0,\ (c_1 + \lambda\delta_1)\, v_1^2 + (c_2 + \lambda\delta_2)\, v_2^2 + (c_3 + \lambda\delta_3)\, v_3^2 = 0.$$

b) Wenn die Schar der von einem Punkte ausgehenden Tangentialkegel die Gleichungen erhalten kann:

$$v_4 = 0,\ \lambda v_1^2 + a_2 v_2^2 + a_3 v_3^2 = 0,$$

so liegt der gemeinschaftliche Scheitel auf einem Kegelschnitte der Schar.

4) a) Durch eine gegebene gerade Linie geht i. a. ein einziges Paar von Ebenen, welche zu einander in Bezug auf die Flächen der Schar konjugiert sind. Es sind dies die Tangentialebenen an diejenigen beiden Flächen der Schar, welche von der Geraden berührt werden.

b) Im allgemeinen giebt es zwei Flächen zweiter Ordnung, welche acht gegebene Ebenen und eine gegebene Gerade berühren.

c) Die Schnittlinie von irgend zwei gemeinschaftlichen Tangentialebenen gehört einer Fläche der Schar an; durch sie gehen unendlich viele Paare von gemeinsamen konjugierten Polarebenen.

5) Man untersuche eine Flächenschar zweiter Klasse vermittelst Punktkoordinaten.

Es wird genügen, die Gleichungen für Ebenenkoordinaten in der Form

$$(a_1 + \lambda b_1)\, u_1^2 + \ldots + (a_4 + \lambda b_4)\, u_4^2 = 0$$

vorauszusetzen. Von dieser Gleichung gehe man zu den zugehörigen Punktkoordinaten über. Man gebe speciell an, welche Flächen der Schar a) durch einen beliebigen Punkt des Raumes, b) durch einen Punkt auf einer der Koordinatenebenen, c) durch einen Punkt auf einem Kegelschnitte der Schar gelegt werden können.

Speciell nehme man an, es sei $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 1$.

6) a) Eine Flächenschar zweiter Klasse enthält entweder ein einziges oder unendlich viele Paraboloide.

b) Die Mittelpunkte aller Flächen der Schar fallen entweder zusammen oder liegen in gerader Linie.

c) Speciell liegen die Mittelpunkte der vier Kegelschnitte, die von acht gegebenen Ebenen berührt werden, in einer geraden Linie.

d) Wenn der Flächenschar ein unendlichferner Kegelschnitt angehört, so haben alle ihre andern Flächen denselben Mittelpunkt.

7) Man untersuche diejenigen Flächenscharen, welche den in § 25 untersuchten Büscheln entsprechen. Speciell zeige man, dafs der an zweiter Stelle angeführte Büschel zugleich eine Schar darstellt. Auch weise man nach, dafs die gemeinsamen Tangentialebenen zweier Flächen zweiter Klasse, welche eine gerade

Linie gemein haben, Schmiegungsebenen an eine kubische Raumkurve sind.

8) a) Es seien f und φ zwei Flächen zweiter Ordnung, welche sich nicht berühren; f_1 und φ_1 seien zwei eigentliche Flächen des durch f und φ bestimmten Büschels. Jetzt sollen f_2 und φ_2 der durch f_1 und φ_1 bestimmten Schar angehören, f_3 und φ_3 aber zwei Flächen des durch f_2 und φ_2 bestimmten Büschels sein u. s. w. Was haben alle Flächen gemeinsam, welche man auf diese Weise erhalten kann?

b) Speciell beziehe man f und φ auf ihr gemeinsames Polartetraeder und benutze dies auch zur Darstellung der weiteren Flächen.

9) a) Die Punkte, in denen sich die durch ihre Gleichungen in Punktkoordinaten

$$\varphi(x_1 \ldots x_4) = 0,\ \psi(x_1 \ldots x_4) = 0,\ \chi(x_1 \ldots x_4) = 0$$

gegebenen Flächen schneiden, sind auch für beliebige Werte von λ, μ, ν den Flächen $\lambda\varphi(x) + \mu\psi(x) + \nu\chi(x) = 0$ gemeinsam.

b) Drei Flächen zweiter Ordnung haben im allgemeinen acht Punkte gemeinschaftlich.

α) Wenn speciell eine der drei Flächen ein Ebenenpaar ist, so hat jede der beiden Ebenen mit den übrigen Flächen vier Punkte gemeinschaftlich.

β) Dasselbe gilt entsprechend, wenn sich unter den Flächen $\lambda\varphi + \mu\psi + \nu\chi = 0$ ein Ebenenpaar befindet.

γ) Wenn sich unter den Flächen zwei befinden, die sich nicht berühren, so kann man neue Koordinaten so einführen, dafs sich die Quadrate x_3^2 und x_4^2 linear durch x_1^2 und x_2^2 darstellen lassen. Indem wir die entsprechenden Werte von x_3 und x_4 in die Gleichung der dritten Fläche einsetzen, erhalten wir für das Verhältnis $x_1 : x_2$ eine Gleichung achten Grades.

10) a) Man kann sieben Schnittpunkte von drei Flächen zweiter Ordnung willkürlich wählen.

(Durch die sieben gegebenen Punkte und zwei andere lege man eine Fläche, eine zweite durch die sieben ersten und zwei der ersten nicht angehörende Punkte, endlich eine dritte durch die sieben gegebenen Punkte und zwei weitere, welche nicht auf der Schnittkurve der beiden ersten liegen.)

b) Wenn drei Flächen zweiter Ordnung sieben Punkte gemein haben, so gehen sie noch durch einen festen achten Punkt hindurch.

c) Nachdem sieben Schnittpunkte dreier Flächen zweiter Ordnung gegeben sind, soll der achte konstruiert werden.

(Sind 1, 2, 3 . . . 7 die gegebenen Punkte, so lege man durch den Punkt 7 die Sekante an die durch die übrigen Punkte bestimmte Raumkurve dritter Ordnung; ebenso ziehe man vom Punkte 6 aus die Sekante an die kubische Raumkurve, welche durch die Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 7 gelegt werden kann; diese beiden Geraden treffen. sich in dem gesuchten achten Schnittpunkte. Durch die acht Punkte kann man drei nicht einem Büschel angehörende Flächen legen. Denn erstens liegen die beiden Raumkurven und ihre beiden Sekanten auf derselben Fläche zweiter Ordnung; wenn zweitens die Sekante (78) die Raumkurve (1 . . . 6) in den Punkten α und β schneidet, so kann man α zur Spitze eines Kegels wählen, der durch die acht Punkte geht u. s. w.)

d) Die acht gemeinsamen Punkte dreier Flächen zweiter Ordnung haben die Eigenschaft, dafs die Verbindungslinie von irgend zwei unter ihnen jedesmal Sekante an die durch die übrigen sechs Punkte gelegte kubische Raumkurve ist.

e) Bei besonderen Lagen der sieben Punkte, welche drei Flächen zweiter Ordnung gemeinschaftlich haben sollen, sind den Flächen nicht einzelne Punkte, sondern Linien gemeinsam.

α) Wenn der siebente Punkt auf der durch die sechs ersten gehenden Raumkurven dritter Ordnung liegt, so haben die Flächen diese Kurve gemeinschaftlich.

β) Wofern fünf unter den sieben gegebenen Punkten einem Kegelschnitte angehören, ist dieser allen Flächen gemeinsam.

γ) Wenn drei von den gegebenen Punkten in gerader Linie liegen, gehört diese allen durch die sieben Punkte gehenden Flächen an.

11) a) Drei Flächen zweiter Klasse haben i. a. acht Tangentialebenen gemeinschaftlich.

b) Sieben von diesen Tangentialebenen können immer willkürlich gewählt werden.

c) Sind die Gleichungen dreier Flächen derselben Klasse in Ebenenkoordinaten $\Phi(u) = 0$, $\Psi(u) = 0$, $X(u) = 0$, so berühren

die ihnen gemeinsamen Tangentialebenen auch jede Fläche, deren Gleichung ist: $\lambda\Phi + \mu\Psi + \nu X = 0$.

12)—15) Fortsetzung der Übung 9) zu § 23..

12) a) Wenn $\varphi_1(x) = 0$, $\varphi_2(x) = 0$ . . . Gleichungen von Flächen n^{ter} Ordnung sind, so nennt man die Gesamtheit der Flächen, welche bei Benutzung von beliebigen Konstanten λ_1, λ_2 . . . in der Form

$$(\alpha) \quad \lambda_1\varphi_1(x) + \lambda_2\varphi_2(x) + \ldots = 0$$

dargestellt werden können, ein Linearsystem von Flächen n^{ter} Ordnung. Dabei setzen wir voraus, dafs die Flächen $\varphi_1(x) = 0$, $\varphi_2(x) = 0$ . . . von einander unabhängig sind, dafs also die linke Seite von (α) nur dann identisch verschwinden kann, wenn $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = 0$ ist. Der Grad der Unendlichkeit des Systems ist um eins geringer, als die Zahl der Konstanten λ_1, λ_2 . . . Speciell bezeichnen wir ein einfach unendliches Linearsystem von Flächen derselben Ordnung als einen Büschel, ein zweifach unendliches System dieser Art als Bündel.

In gleicher Weise setzt man aus mehreren Gleichungen, welche in Ebenenkoordinaten vom Grade m sind, ein Linearsystem m^{ter} Klasse zusammen. Speciell bestimmen zwei solche Flächen eine Schar, drei eine Schar-Schar.

b) Wenn eine Fläche zweiter Klasse $\Sigma a_{\iota\varkappa} u_\iota u_\varkappa = 0$ gegeben ist, so kann man neun von einander unabhängige Flächen zweiter Ordnung $\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa = 0$, $\Sigma b_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa = 0$ . . . derartig bestimmen, dafs die Bedingungen befriedigt werden:

$$\Sigma a_{\iota\varkappa} \alpha_{\iota\varkappa} = 0, \quad \Sigma b_{\iota\varkappa} \alpha_{\iota\varkappa} = 0 \ . \ .$$

Es sei etwa die Gleichung gegeben:

$$\alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \alpha_3 u_3^2 + u_4^2 = 0.$$

Dann darf man den Koefficienten $a_{\iota\varkappa}$ für ungleiche Marken ι und $\varkappa$ ganz beliebige Werte beilegen und mufs nur zwischen a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44} eine einzige Gleichung bestehen lassen. Man darf daher dem Linearsystem folgende Flächen zu Grunde legen:

$$x_1^2 - \alpha_1 x_4^2 = 0, \ x_2^2 - \alpha_2 x_4^2 = 0, \ x_3^2 - \alpha_3 x_4^2 = 0, \ x_1 x_2 = 0,$$
$$x_1 x_3 = 0, \ x_1 x_4 = 0, \ x_2 x_3 = 0, \ x_2 x_4 = 0, \ x_3 x_4 = 0.$$

Daraus ergeben sich folgende Sätze:

α) Ein achtfach unendliches Linearsystem von Flächen zweiter Ordnung ist durch eine Fläche zweiter Klasse bestimmt; jene Flächen haben zwar kein gemeinschaftliches Polartetraeder, aber

jede enthält unendlichviele Polartetraeder, deren Seitenflächen von der Fläche zweiter Klasse berührt werden.

β) Dem Linearsystem gehören zweifach unendlich viele Doppelebenen an; es sind dies die Tangentialebenen der Fläche zweiter Klasse.

γ) Jede Ebene bildet mit unendlich vielen Ebenen, nämlich den durch einen festen Punkt gehenden Ebenen, ein dem System angehörendes Ebenenpaar.

δ) Alle Kegel des Systems, welche eine feste Spitze besitzen, bilden ein vierfach unendliches Linearsystem. Der von der festen Spitze aus an die Fläche zweiter Klasse gelegte Tangentialkegel wird von den Seitenflächen unendlich vieler Dreikante berührt, welche Polardreikante zu je einem Kegel des Systems sind.

c) Man gehe umgekehrt von einer Fläche zweiter Ordnung aus und untersuche das ihr zugeordnete Linearsystem von Flächen zweiter Klasse.

d) Um das allgemeine durch acht Flächen zweiter Klasse bestimmte Linearsystem zu untersuchen, gehe man von einem allgemeinen Flächenbüschel zweiter Ordnung aus. Das Linearsystem enthält eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von solchen Flächen, die in einen Doppelpunkt übergegangen sind. Ein beliebiger Punkt des Raumes gehört mit unendlich vielen andern Punkten, die in einer bestimmten geraden Linie liegen, je einem Punktepaare des Systems an. Man soll alle Kegelschnitte des Systems bestimmen, die in einer vorgeschriebenen Ebene liegen.

Das Linearsystem enthält bei geeigneter Wahl der Koordinaten die durch die folgenden Gleichungen dargestellten Flächen:

$$u_1 u_2 = 0,\ u_1 u_3 = 0,\ u_1 u_4 = 0,\ u_2 u_3 = 0,\ u_2 u_4 = 0,\ u_3 u_4 = 0,$$
$$u_1^2 + \alpha u_3^2 + \beta u_4^2 = 0,\ u_2^2 + \gamma u_3^2 + \delta u_4^2 = 0.$$

13) a) Durch die acht Eckpunkte von zwei Polartetraedern einer gegebenen Fläche zweiter Ordnung läfst sich ein Bündel von Flächen zweiter Ordnung legen.

(Jede Fläche, welche durch sieben unter den acht Eckpunkten gelegt werden kann, enthält die Eckpunkte von einem und somit von unendlich vielen Polartetraedern der gegebenen Fläche, also auch den achten Eckpunkt.)

b) Ordnet man die acht Grundpunkte eines Flächenbündels zweiter Ordnung in beliebiger Weise zu zwei Quadrupeln an, so

läfst sich eine Fläche zweiter Ordnung konstruieren, für welche die Punkte eines jeden Quadrupels je Eckpunkte eines Polartetraeders sind.

(Man kann eine Fläche zweiter Ordnung finden, welche ein gegebenes Polartetraeder besitzt und für welche je zwei von drei weiteren Punkten konjugierte Pole zu einander sind. Die Beziehung dieser Fläche zu den Flächen des Bündels liefert den Beweis.)

c) Jede Fläche zweiter Klasse, welche sieben von den acht Seitenflächen zweier Polartetraeder einer Fläche zweiter Ordnung berühren, hat auch die achte Seitenfläche zur Tangentialebene.

d) Ordnet man die acht gemeinsamen Tangentialebenen dreier Flächen zweiter Klasse in beliebiger Weise zu Seitenflächen zweier Tetraeder, so läfst sich stets eine Fläche zweiter Ordnung finden, für welche beide Tetraeder Polartetraeder sind.

14) a) Wenn zwei Polartetraeder einer Fläche zweiter Ordnung einen Eckpunkt gemein haben, so liegen die sechs von ihm ausgehenden Kanten auf einem Kegel zweiter Ordnung.

b) Durch die sechs Geraden, welche zwei Tripel konjugierter Durchmesser bilden, läfst sich ein Kegel zweiter Ordnung legen.

c) Wenn ein Kegel ein Tripel konjugierter Durchmesser einer Fläche zweiter Ordnung enthält, so liegen auf ihm unendlich viele Tripel von Durchmessern derselben Fläche.

15) a) Wenn zwei Polartetraeder einer Fläche zweiter Klasse eine Ebene gemein haben, so sind die sechs andern Ebenen Tangentialebenen an einen Kegel zweiter Klasse.

b) Zwei Tripel konjugierter Durchmesserebenen einer Fläche zweiter Ordnung sind Tangentialebenen an einen Kegel zweiter Klasse.

Anhang
über kollineare und reciproke Zuordnung im Raume.

1. Schon im ersten Teile (S. 138 ff.) haben wir gesehen, dafs wir zwei Ebenen kollinear auf einander beziehen können. In ähnlicher Weise können wir auch zwei Strahlenbündel oder auch eine Ebene und einen Strahlenbündel einander kollinear zuordnen. Man nennt zwei Strahlenbündel Σ und Σ' kollinear auf einander bezogen, wenn jedem Strahle von Σ ein Strahl von Σ' und jeder Ebene von Σ eine Ebene von Σ' in der Weise zugeordnet

ist, daſs jedesmal, wenn im ersten Bündel ein Strahl in eine Ebene fällt, dasselbe für die entsprechenden Gebilde im zweiten Bündel stattfindet. In ähnlicher Weise ist eine Ebene E einem Strahlenbündel Σ' dann kollinear zugeordnet, wenn jedem Punkte von E ein Strahl von Σ' und jeder Geraden von E eine Ebene von Σ' derartig entspricht, daſs jedesmal, wenn ein Punkt von E in einer Geraden von E liegt, auch der dem Punkte entsprechende Strahl in die der Geraden entsprechende Ebene fällt.

2. Man überzeugt sich sehr leicht, daſs perspektive zweistufige Gebilde einander auch kollinear entsprechen. Sind z. B. eine Ebene und ein Strahlenbündel gegeben, wobei nur vorausgesetzt wird, daſs der Scheitel des Bündels nicht in der Ebene liegt, und ordnet man jedem Punkte π der Ebene den durch ihn hindurchgehenden Strahl p′ des Bündels, und jeder Geraden g der Ebene die durch sie hindurchgehende Ebene Γ' des Bündels zu, so geht jedesmal, wenn π in g liegt, auch Γ' durch p′ hindurch. Dasselbe gilt, wenn man in zwei nicht konzentrischen Strahlenbündeln diejenigen Strahlen p und p′ einander zuordnet, welche eine feste Ebene in demselben Punkte schneiden, und demgemäſs diejenigen Ebenen der Bündel einander entsprechen läſst, welche mit der festen Ebene dieselbe Schnittlinie haben.

3. Es seien etwa zwei Ebenen E und E' kollinear auf einander bezogen; irgend einem Punkte π der ersten möge ein Punkt π' der zweiten zugeordnet sein. Die erste Ebene projiziere man durch einen beliebigen Strahlenbündel Σ und lasse dem Punkt π von E den durch ihn hindurchgehenden Strahl p von Σ entsprechen. Dadurch ist auch eine kollineare Zuordnung des Bündels Σ zur Ebene E' bestimmt, indem man dem durch π hindurchgehenden Strahle p den Punkt π' zuordnet. In ähnlicher Weise können die beiden kollinear auf einander bezogenen Ebenen E und E' benutzt werden, um zwei beliebige Strahlenbündel Σ und Σ' einander kollinear zuzuordnen; man läſst dem durch π gehenden Strahl p von Σ den durch π' gehenden Strahl p′ von Σ' entsprechen.

Wenn umgekehrt zwei kollineare Strahlenbündel gegeben sind, so vermitteln sie in entsprechender Weise die kollineare Zuordnung von zwei beliebig gewählten Ebenen.

4. Wir haben früher (I S. 140) bewiesen, daſs in zwei

kollinear auf einander bezogenen Ebenen entsprechende gerade Punktreihen sowie entsprechende Strahlenbüschel einander projektiv zugeordnet sind. Wenn eine Ebene E einem Strahlenbündel Σ kollinear entspricht, so ist jeder Punktreihe von E ein ebener Strahlenbüschel von Σ zugeordnet; auch diese müssen einander projektiv entsprechen. Einem Strahlenbüschel in E entspricht ein Ebenenbüschel von Σ; wiederum ist die Zuordnung projektiv. Ähnliches gilt für zwei kollinear auf einander bezogene Strahlenbündel.

5. Um eine Ebene kollinear auf einen Strahlenbündel zu beziehen, wähle man in der Ebene vier Punkte, von denen keine drei in gerader Linie liegen, und ordne ihnen vier Strahlen des Bündels zu, wobei nur verlangt wird, dafs sich auch durch keine drei Strahlen eine Ebene legen läfst. Wenn zwei Strahlenbündel gegeben sind, so wähle man in jedem vier Strahlen, von denen niemals drei einer Ebene angehören; indem man diese der Reihe nach einander entsprechen läfst, hat man die kollineare Zuordnung vollständig bestimmt. Statt dessen kann man auch in jedem Bündel vier Ebenen willkürlich wählen und mufs nur verlangen, dafs niemals drei demselben Bündel angehörende Ebenen eine gerade Linie gemeinschaftlich haben; auch diese vermitteln das kollineare Entsprechen in eindeutiger Weise.

6. In den folgenden Untersuchungen beziehen wir den Raum auf sich selbst. Demnach mufs jedes Raumgebilde in doppelter Weise betrachtet werden: einmal als ein solches, welches auf ein anderes bezogen wird, und dann als ein Gebilde, auf welches ein anderes bezogen wird. Um diese doppelte Beziehung scharf aus einander zu halten, denken wir den Raum doppelt, nämlich erstens als den Inbegriff aller Gebilde, die auf ein anderes bezogen werden, und dann als den Inbegriff aller Gebilde, auf welche die übrigen bezogen werden. Wir sprechen daher von verschiedenen Räumen, obwohl dies an sich nicht gestattet ist. (In ähnlicher Weise verfuhren wir früher, als wir eine Ebene auf sich selbst kollinear oder reciprok bezogen.)

7. Zwei Räume heifsen kollinear auf einander bezogen, wenn jedem Punkte des einen ein Punkt des andern und jeder Ebene des ersten eine Ebene des zweiten in der Weise zugeordnet ist, dafs jedesmal,

wenn in dem ersten Raume ein Punkt π in einer Ebene E liegt, auch im zweiten Raume der entsprechende Punkt π' in der zugeordneten Ebene E' enthalten ist.

Wenn zwei Räume einander kollinear zugeordnet sind, so ist auch jede Ebene des einen kollinear auf eine Ebene des andern und jeder Strahlenbündel des ersten kollinear auf einen Strahlenbündel des andern bezogen. Zugleich ist jede gerade Punktreihe im ersten einer Punktreihe im zweiten projektiv zugeordnet; ebenso entspricht jedem ebenen Strahlenbüschel im ersten projektiv ein ebener Strahlenbüschel im zweiten, jedem Ebenenbüschel im einen ein Ebenenbüschel im andern.

Alle diese Behauptungen folgen unmittelbar aus dem Begriffe der kollinearen Zuordnung. Hiernach entspricht einer beliebigen Ebene E des ersten Raumes eine Ebene E' des zweiten derartig, daſs jedem Punkte der ersten ein Punkt der zweiten zugewiesen wird. Ist jetzt Π eine zweite Ebene des ersten Raumes und entspricht ihr im zweiten Raume die Ebene Π', so ist auch jedem Punkte von Π ein Punkt von Π' zugeordnet. Der Schnittlinie der Ebenen Π und E entspricht also die Schnittlinie der Ebenen Π' und E'. Die Ebenen E und E' sind also in der Weise auf einander bezogen, daſs ein Punkt π der ersten Ebene in einer Geraden g liegt, auch der entsprechende Punkt π' der zu g zugeordneten Geraden g' angehört; die Ebenen sind somit einander kollinear zugeordnet.

In gleicher Weise zeigt man, daſs jedem Strahlenbündel ein kollinearer Strahlenbündel entspricht.

Früher haben wir bereits nachgewiesen, daſs gerade Punktreihen in kollinearen Ebenen projektiv auf einander bezogen sind; folglich gilt dasselbe von kollinearen Räumen. Auf ebene Strahlenbüschel und Ebenenbüschel brauchen wir nicht weiter einzugehen.

8. Es ist sehr leicht, zwei Räume kollinear auf einander zu beziehen. Zu dem Zwecke lege man nämlich in jedem von ihnen ein Tetraeder der Koordinatenbestimmung zu Grunde. Im ersten Raume mögen die $x_1 \ldots x_4$ die Punkt- und die $u_1 \ldots u_4$ die zugehörigen Ebenenkoordinaten sein. Ebenso mögen im zweiten Raume die Punktkoordinaten $y_1 \ldots y_4$ mit den Ebenenkoordinaten $v_1 \ldots v_4$ zusammengehören. Jetzt ordne man dem Punkte (x) denjenigen Punkt (y) zu, für den ist

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1 : y_2 : y_3 : y_4,$$

und lasse der Ebene (u) diejenige Ebene (v) entsprechen, für welche die Beziehungen bestehen:

$$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = v_1 : v_2 : v_3 : v_4.$$

So oft ein Punkt (x) des ersten Raumes in einer Ebene (u) enthalten ist, mufs die Bedingung erfüllt sein:

$$x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4 = 0;$$

dann besteht aber auch die Gleichung:

$$y_1v_1 + y_2v_2 + y_3v_3 + y_4v_4 = 0,$$

oder die entsprechenden Elemente des zweiten Raumes fallen ebenfalls zusammen; die Zuordnung ist somit kollinear.

9. Zwei Räume können nur in einer einzigen Weise kollinear so auf einander bezogen werden, dafs fünf Punkten von allgemeiner Lage im ersten fünf Punkte im zweiten entsprechen, die ebenfalls allgemeine Lage zu einander haben.

Hierbei legen wir fünf Punkten desselben Raumes allgemeine Lage zu einander bei, falls keine vier von ihnen in einer Ebene liegen.

Die Möglichkeit, die beiden Räume so auf einander zu beziehen, dafs den Punkten $\pi_1 \ldots \pi_5$ des ersten der Reihe nach die Punkte $\pi_1' \ldots \pi_5'$ des andern entsprechen, erkennen wir auf folgendem Wege. Wir wählen die vier Punkte $\pi_1 \ldots \pi_4$ zu Eckpunkten des Koordinaten-Tetraeders im ersten Raume und den Punkt π_5 zum Einheitspunkte, und nennen $x_1 \ldots x_4$ die auf diese Weise erhaltenen Punktkoordinaten. Ebenso wählen wir die Punkte $\pi_1' \ldots \pi_4'$ zu Eckpunkten und den Punkt π_5' zum Einheitspunkte für die Bestimmung der Punktkoordinaten $y_1 \ldots y_4$ im zweiten Raume. Dabei sollen π_1 und π_1' die Koordinaten (1, 0, 0, 0), π_2 und π_2' die Koordinaten (0, 1, 0, 0) u. s. w. haben. Jetzt lasse man dem Punkte (x) denjenigen Punkt (y) entsprechen, für den

$$x_1 : \ldots : x_4 = y_1 : \ldots : y_4$$

ist. Alsdann gehören diejenigen Punkte des zweiten Raumes, welche den sämtlichen in einer Ebene des ersten Raumes gelegenen Punkten entsprechen, wiederum einer Ebene an; die Zuordnung ist also kollinear.

10. Wir müssen aber noch zeigen, dafs die beiden Räume,

sobald in ihnen die Punkte $\pi_1 \ldots \pi_5$ und $\pi_1' \ldots \pi_5'$ einander entsprechen sollen, nur auf eine einzige Weise einander kollinear zugeordnet werden können. Aus der angegebenen Forderung folgt unmittelbar, dafs dem Schnittpunkte der Geraden $\pi_1\pi_5$ mit der Ebene $\pi_2\pi_3\pi_4$ der Schnittpunkt der Geraden $\pi_1'\pi_5'$ und der Ebene $\pi_2'\pi_3'\pi_4'$ entsprechen mufs. Die Ebene $\pi_2\pi_3\pi_4$ soll aber der Ebene $\pi_2'\pi_3'\pi_4'$ kollinear zugeordnet sein, und zwar soll dem Punkte π_2 der Punkt π_2', dem Punkte π_3 der Punkt π_3', dem Punkte π_4 der Punkt π_4', dem Schnittpunkte der ersten Ebene mit der Geraden $\pi_1\pi_5$ der Schnittpunkt der zweiten Ebene mit der Geraden $\pi_1'\pi_5'$ entsprechen. Hierdurch ist aber die Zuordnung der Ebenen zu einander eindeutig bestimmt.

Dieselbe Erwägung kann man für jede Ebene anstellen, welche durch irgend drei von den im ersten Raume gegebenen Punkten gelegt werden kann; jeder solchen Ebene entspricht eine bestimmte Ebene des zweiten Raumes in der Weise, dafs auch jedem Punkte der ersten Ebene ein bestimmter Punkt der zweiten zugeordnet ist. Hiernach kann auch jedem Punkte des ersten Raumes nur ein einziger Punkt des zweiten entsprechen.

11. Statt in jedem der beiden Räume fünf Punkte anzunehmen und durch sie die kollineare Zuordnung zu vermitteln, kann man auch in jedem der beiden Räume fünf Ebenen beliebig wählen, wofern nur keine vier demselben Raume angehörenden durch denselben Punkt hindurchgehen; alsdann kann man die Räume stets in der Weise einander kollinear zuordnen, dafs die Ebenen des ersten Raumes denen des zweiten der Reihe nach entsprechen. Der Beweis läfst sich entweder in der Weise führen, dafs wir in der früheren Entwicklung Punkt und Ebene immer mit einander vertauschen, oder wir betrachten zuerst jede der fünf gegebenen Ebenen des ersten Raumes für sich und beachten, dafs uns zur Vermittlung der kollinearen Beziehung auf die entsprechende Ebene des zweiten Raumes vier gerade Linien gegeben sind.

Da sowohl die Lage eines Punktes wie die einer Ebene von drei Gröfsen abhängt, so wird die kollineare Beziehung zweier Räume durch fünfzehn Parameter bestimmt.

12. Die beiden Räume, von denen wir zuletzt immer gesprochen haben, sind in der That identisch; sie durchdringen

einander, wie man wohl sagt. Demnach ist es am natürlichsten, nicht verschiedene Koordinatensysteme, wie wir vorhin gethan haben, zu benutzen, sondern dieselben Koordinaten zu Grunde zu legen. Dabei müssen wir beachten, dafs die Koordinaten $y_1 \dots y_4$ lineare Funktionen von $x_1 \dots x_4$ sind und die $v_1 \dots v_4$ in ähnlicher Weise von $u_1 \dots u_4$ abhangen. Da jeder Punkt in doppelter Weise betrachtet wird, müssen wir dies auch bei den Koordinaten andeuten; daher wollen wir die Koordinaten des dem Punkte $(x_1 \dots x_4)$ zugeordneten Punktes durch x_1', x_2', x_3', x_4' bezeichnen. Hiernach wird die kollineare Zuordnung durch die Gleichungen vermittelt:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \varrho x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varrho x_4' &= a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4, \end{aligned}$$

wo die Koefficienten a_{ix} und a_{xi} im allgemeinen verschiedene Werte haben.

Nach § 5, 8. 9 (S. 35—37) wird jetzt die Beziehung zwischen den Ebenen $(u_1 \dots u_4)$ des ersten und den Ebenen $(u_1' \dots u_4')$ des zweiten Raumes durch die Gleichungen vermittelt:

$$(2)\qquad \begin{aligned} \sigma u_1 &= a_{11}u_1' + a_{21}u_2' + a_{31}u_3' + a_{41}u_4' \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sigma u_4 &= a_{14}u_1' + a_{24}u_2' + a_{34}u_3' + a_{44}u_4'. \end{aligned}$$

In der That wird jetzt jedesmal, wenn der Punkt (x) in der Ebene (u) liegt, auch der Punkt (x′) der Ebene (u′) angehören. Es ist nämlich

$$\sigma \sum_i u_i x_i = \sum_i x_i \sum_x a_{xi} u_x' = \sum_x u_x' \sum_i a_{xi} x_i = \varrho \sum u_x' x_x';$$

wenn also $\sum u_i x_i = 0$ ist, mufs auch $\sum u_i' x_i' = 0$ sein.

Die Zuordnung der beiden Räume hängt bei dieser Darstellung von den Verhältnissen der sechzehn Koefficienten a_{ix} oder von fünfzehn Parametern ab.

13. Bei der kollinearen Zuordnung geht jeder Punkt in einen Punkt, jede Gerade in eine Gerade und jede Ebene in eine Ebene über. Daher wird jede Fläche in eine Fläche derselben Ordnung übergeführt. Bei den Flächen zweiter Ordnung bleibt zudem der Charakter ungeändert, soweit er bei der in § 18 durchgeführten projektiven Einteilung in Betracht kommt: eigentliche Flächen

gehen in eigentliche, Kegelflächen in Kegelflächen über u. s. w.; imaginäre Flächen bleiben imaginär, geradlinige bleiben geradlinig.

14. Nach demselben Gesetze, nach welchem zwei Ebenen einander reciprok zugeordnet werden (I S. 144 ff.), lassen sich überhaupt zwei zweistufige Grundgebilde reciprok auf einander beziehen. So entsprechen zwei Strahlenbündel Σ und Σ einander reciprok, wenn jeder Ebene Π des ersten ein Strahl p′ des zweiten und jedem Strahle p des ersten eine Ebene Π' des zweiten derartig zugeordnet ist, dafs jedesmal, wenn p in Π enthalten ist, auch Π' durch p′ hindurchgeht. Eine Ebene E ist reciprok auf einen Strahlenbündel Σ' bezogen, wenn jeder Geraden der Ebene ein Strahl des Bündels und jedem Punkte der Ebene eine Ebene des Bündels derartig entspricht, dafs jedesmal, wenn ein Punkt in einer Geraden von E liegt, auch die dem Punkte entsprechende Ebene von Σ' durch den der Geraden entsprechenden Strahl geht.

15. Auch die reciproke Zuordnung ändert sich nicht bei Schneiden und Projizieren. So seien zwei Ebenen reciprok auf einander bezogen. Projiziert man die eine von ihnen durch einen beliebigen Strahlenbündel, so kann man jedem Strahle dieses Bündels diejenige Gerade der zweiten Ebene zuordnen, welche bei der gegebenen Zuordnung dem Treffpunkte des Strahles mit der ersten Ebene entspricht; alsdann wird auch jeder Ebene des Bündels ein bestimmter Punkt der zweiten Ebene zugeordnet, und das gegenseitige Entsprechen mufs als ein reciprokes bezeichnet werden.

In ähnlicher Weise kann man die beiden gegebenen Ebenen durch beliebige Strahlenbündel projizieren und die reciproke Zuordnung der ersteren dazu benutzen, um die Strahlenbündel reciprok auf einander zu beziehen. Auch kann man zwei reciproke Strahlenbündel durch Ebenen durchschneiden, welche nicht durch die Scheitel hindurchgehen, und eine reciproke Zuordnung der Ebenen durch die der Strahlenbündel vermitteln.

16. Die reciproke Zuordnung von zwei zweistufigen Grundgebilden ist eindeutig bestimmt, sobald man zu vier gleichartigen Elementen des einen die ihnen entsprechenden Elemente des andern kennt; nur ist es notwendig, dafs die vier Elemente beidemale allgemeine Lage zu einander haben. Will man z. B. einen Strahlenbündel auf eine Ebene reciprok beziehen, so wählt man

im Bündel vier Strahlen $p_1 \ldots p_4$ willkürlich und nur so, daſs sich durch keine drei von ihnen eine Ebene legen läſst; dann ordnet man ihnen vier Gerade $q_1' \ldots q_4'$ der Ebene, von denen keine drei durch denselben Punkt gehen, der Reihe nach zu. In ähnlicher Weise verfährt man bei zwei Strahlenbündeln Σ und Σ': man wählt im ersten vier Strahlen $p_1 \ldots p_4$ und im zweiten vier Ebenen $\Pi_1' \ldots \Pi_4'$, welche je allgemeine Lage zu einander haben, und läſst diese einander entsprechen.

Daſs hierbei jedesmal eine reciproke Zuordnung, und zwar nur auf eine einzige Weise, möglich ist, erkennt man sehr leicht direkt; man kann den Satz aber auch auf den entsprechenden, früher für zwei Ebenen bewiesenen Satz zurückführen.

17. Man kann auch den Raum reciprok auf sich selbst beziehen, oder wie wir lieber sagen, weil jeder Punkt und jede Ebene doppelt betrachtet werden muſs, man kann zwei Räume einander reciprok zuordnen. Dabei stellen wir folgende Definition auf:

Zwei Räume sind reciprok auf einander bezogen, wenn jedem Punkte des einen eine Ebene des andern in der Weise entspricht, daſs jedesmal, wenn in dem ersten Raume ein Punkt in einer Ebene liegt, die dem Punkte entsprechende Ebene des zweiten Raumes durch den der Ebene zugeordneten Punkt geht.

Von der Möglichkeit, zwei Räume einander reciprok zuzuordnen, überzeugt man sich sehr leicht. Man lasse im ersten Raume $(x_1 \ldots x_4)$ und $(u_1 \ldots u_4)$ zusammengehörige Punkt- und Ebenenkoordinaten sein; ebenso mögen im zweiten Raume $y_1 \ldots y_4$ und $v_1 \ldots v_4$ zusammengehörige Punkt- und Ebenenkoordinaten sein. Die Zuordnung der beiden Räume, welche durch die Gleichungen vermittelt wird:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = v_1 : v_2 : v_3 : v_4,$$
$$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = y_1 : y_2 : y_3 : y_4,$$

ist offenbar eine reciproke.

18. Einer Ebene des ersten Raumes und den in ihr liegenden Punkten und Geraden (als Punktreihen) entspricht im zweiten Raume ein Strahlenbündel; auch diese Zuordnung ist eine reciproke. Dementsprechend sind den Punkten einer Punktreihe des

ersten Raumes die Ebenen eines Büschels im zweiten Raume projektiv zugeordnet.

19. Sobald man fünf Punkten des einen Raumes, von denen keine vier in einer Ebene liegen, fünf Ebenen des andern, von denen keine vier durch einen Punkt gehen, der Reihe nach zugeordnet hat, ist die reciproke Zuordnung der Räume bestimmt. Dafs es eine derartige Zuordnung giebt, zeigt man wieder durch passende Wahl der Koordinatensysteme. Im ersten Raume nehme man die vier ersten Punkte zu Eckpunkten des Koordinaten-Tetraeders und den fünften zum Einheitspunkte; im zweiten Raume lasse man das Koordinaten-Tetraeder durch die vier ersten Ebenen begrenzt sein und wähle die fünfte Ebene zur Einheitsebene. Vermittelst der Koordinaten, welche man bei dieser Festsetzung erhält, kann man die Zuordnung der Räume in den vorhin angegebenen Gleichungen darstellen.

20. Man sieht aber auch sehr leicht, dafs bei keiner zweiten reciproken Zuordnung die fünf Punkte des ersten Raumes den fünf Ebenen des zweiten entsprechen können. Der vom ersten Punkte ausgehende Strahlenbündel mufs nämlich reciprok zugeordnet sein dem auf der ersten Ebene des zweiten Raumes enthaltenen ebenen Systeme; die Art der Zuordnung ist aber bestimmt, weil man zu vier Strahlen des Bündels die ihnen im ebenen Systeme entsprechenden Geraden kennt. Da dasselbe für die Strahlenbündel gilt, welche ihre Strahlenbündel in den vier andern Punkten haben, so kann man zu jedem Punkte des ersten Raumes höchstens eine im zweiten Raume entsprechende Ebene finden.

21. Indem wir die beiden Räume, welche identisch sind und gar nicht getrennt werden können, auf dasselbe Koordinatensystem beziehen und demnach die Koordinaten des zweiten Raumes durch Anhängung eines Striches bezeichnen, erhalten wir folgende Zuordnung:

$$(3)\quad \begin{aligned} \varrho u_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varrho u_4' &= a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4, \end{aligned}$$

mit denen die weiteren Gleichungen verbunden werden müssen:

$$(4)\quad \begin{aligned} \sigma u_1 &= a_{11}x_1' + a_{21}x_2' + a_{31}x_3' + a_{41}x_4' \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sigma u_4 &= a_{14}x_1' + a_{24}x_2' + a_{34}x_3' + a_{44}x_4'. \end{aligned}$$

Die reciproke Zuordnung zweier Räume hängt also von fünfzehn willkürlichen Konstanten ab.

Damit es möglich wird, vermittelst dieser Gleichungen auch jeder Ebene einen Punkt zuzuordnen, mufs die aus den Koefficienten a_{ix} gebildete Determinante von null verschieden sein. Wir schliefsen daher den Fall aus, dafs diese Determinante verschwindet. Indem wir dann noch die zu dem Elemente a_{ix} gehörende Unterdeterminante mit A_{ix} bezeichnen, ergeben sich durch Auflösung der Gleichungen (3) und (4) die folgenden:

$$(5)\quad \begin{aligned} \varrho' x_1 &= A_{11}u_1' + A_{21}u_2' + A_{31}u_3' + A_{41}u_4' \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varrho' x_4 &= A_{14}u_1' + A_{24}u_2' + A_{34}u_3' + A_{44}u_4' \end{aligned}$$

und

$$(6)\quad \begin{aligned} \sigma' x_1' &= A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + A_{13}u_3 + A_{14}u_4 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sigma' x_4' &= A_{41}u_1 + A_{42}u_2 + A_{43}u_3 + A_{44}u_4. \end{aligned}$$

22. Läfst man zwischen den Koordinaten $u_1 \ldots u_4$ eine homogene Gleichung m^{ten} Grades bestehen, so erhalten wir auch zwischen den Koordinaten $x_1' \ldots x_4'$ eine homogene Gleichung m^{ten} Grades. Demnach entspricht einer Fläche m^{ter} Klasse des ersten Raumes eine Fläche m^{ter} Ordnung im zweiten Raume, und umgekehrt wird jede Fläche n^{ter} Ordnung auf eine Fläche n^{ter} Klasse bezogen. Eigentlichen Flächen zweiter Ordnung entsprechen wieder eigentliche Flächen zweiter Klasse; dagegen entspricht einer Kegelfläche eine ebene Kurve.

23. Ein wichtiger Specialfall der Gleichungen (3) und (4) ist der, dafs jeder Koefficient a_{ix} gleich ist a_{xi}. Alsdann sind die Gleichungen (3) und (4) identisch, ebenso die Gleichungen (5) und (6). Demnach ist es gleichgültig, welchem Raume man den einzelnen Punkt zuweist. Wir dürfen daher die oberen Striche an den (x) und den (u) weglassen, wie wir bereits bei der Involution und dem ebenen Polarsystem (I S. 143) gethan haben. Eine derartige Zuordnung der Punkte und Ebenen des Raumes nennen wir ein räumliches Polarsystem.

24. Soll ein Punkt (x) in der ihm entsprechenden Ebene (u) liegen, so mufs die Gleichung erfüllt sein: $\Sigma x_i u_i = 0$. Die Gleichungen (3) zeigen uns, dafs dieser Bedingung jeder Punkt genügt, welcher der Fläche angehört:

$$(7)\quad \Sigma a_{ix} x_i x_x = 0.$$

Diese Fläche heifst die Ordnungsfläche des Polarsystems.

Wegen der Voraussetzung $a_{ix} = a_{xi}$ ist die Bezeichnung (7) identisch mit derjenigen, welche wir früher bei der Untersuchung der Flächen zweiter Ordnung angewandt haben. Demnach stimmen auch die Gleichungen (3) und (4) vollständig überein mit den Gleichungen (7) § 12, 3 (S. 88) oder auch (8) § 13, 10 (S. 97), durch welche für einen beliebigen Punkt (x') die zugehörige Polarebene bestimmt wird. Das Polarsystem ordnet demnach jedem Punkte des Raumes seine Polarebene in Bezug auf die Ordnungsfläche des Systems zu.

Wegen der Gleichungen (5) nimmt die Bedingung dafür, dafs ein Punkt in die zugeordnete Ebene hineinfällt, auch die Form an:

$$(8) \quad \Sigma A_{ix}\, u_i\, u_x = 0,$$

wo A_{ix} jedesmal die zu a_{ix} gehörende Unterdeterminante ist. Infolge der gemachten Voraussetzungen ist die Fläche (8), wie wir in § 13, 10 (Seite 98) gesehen haben, mit der Fläche (7) identisch.

Übungen:

1) a) Wenn zwei Gebilde demselben dritten kollinear zugeordnet sind, so sind sie auch zu einander kollinear zugeordnet.

b) Wenn zwei Gebilde demselben dritten reciprok entsprechen, so sind sie zu einander kollinear zugeordnet.

2) a) Man kann zwei Räume derartig kollinear auf einander beziehen, dafs zwei eigentliche Flächen zweiter Ordnung einander entsprechen, wofern beide nur projektiv zu derselben Art gehören.

b) Speciell kann man den Raum derartig kollinear transformieren, dafs eine beliebige gegebene Fläche zweiter Ordnung sich selbst zugeordnet ist.

(Wenn etwa die Gleichung der Fläche ist:

$$p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + p_3 x_3^2 + p_4 x_4^2 = 0,$$

so müssen die Koefficienten in den Gleichungen (1) den Bedingungen genügen:

$$\frac{1}{p_1}\sum_x p_x a_{x1}^2 = \frac{1}{p_2}\sum_x p_x a_{x2}^2 = \frac{1}{p_3}\sum_x p_x a_{x3}^2 = \frac{1}{p_4}\sum_x p_x a_{x4}^2,$$

$$\sum_x p_x a_{x\alpha} a_{x\beta} = 0 \text{ für } \alpha \lesseqgtr \beta.)$$

c) Man kann den Raum kollinear auch so transformieren, daſs eine imaginäre Fläche zweiter Ordnung ungeändert bleibt; es kommt dies darauf hinaus, zu verlangen, daſs jedesmal, wenn einem Punkte α ein Punkt β zugeordnet wird, auch der Polarebene von α die von β entspricht.

3) a) Wenn zwischen den Koefficienten a_{ix} in den Gleichungen (1) keine besonderen Bedingungen bestehen, so giebt es vier sich selbst entsprechende Punkte und vier sich selbst entsprechende Ebenen.

(Soll $x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ sein, so bestimme man ω vermittelst der Gleichung:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \omega & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} - \omega \end{vmatrix} = 0.$$

Jede Wurzel dieser Gleichung führt auf einen Punkt, der zu sich selbst zugeordnet ist.)

b) Die sich selbst zugeordneten Punkte und Ebenen gehören demselben Tetraeder an, und zwar die Punkte als Eckpunkte, die Ebenen als Seitenflächen.

c) Bei geeigneter Wahl der Koordinaten kann jede kollineare Transformation von allgemeinem Charakter vermittelst der Gleichung dargestellt werden:

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = \lambda_1 x_1 : \lambda_2 x_2 : \lambda_3 x_3 : \lambda_4 x_4,$$
$$\lambda_1 u_1' : \lambda_2 u_2' : \lambda_3 u_3' : \lambda_4 u_4' = u_1 : u_2 : u_3 : u_4.$$

d) Eine allgemeine kollineare Transformation des Raumes bezieht keine eigentliche Fläche zweiter Ordnung auf sich selbst.

(Die Gleichung $\Sigma q_{ix} x_i x_x = 0$ kann für die in c) angegebene Transformation bei ungleichen Werten der vier Koefficienten $\lambda_1 \ldots \lambda_4$ nur dann ungeändert bleiben, wenn sie ein Ebenenpaar oder eine Doppelebene darstellt.)

e) Jede Fläche zweiter Ordnung, für welche die vier sich selbst entsprechenden Punkte die Eckpunkte eines Polartetraeders sind, kann bei kollinearer Zuordnung nur einer solchen Fläche entsprechen, für welche die vier Punkte ebenfalls Eckpunkte eines Polartetraeders sind.

(Dies folgt unmittelbar aus den in c) angegebenen Gleichungen; man soll es auch ohne jede Rechnung begründen.)

f) Um die speciellen Arten der kollinearen Transformationen zu erhalten, empfiehlt sich folgender Weg. Jeder Wurzel der in a) aufgestellten Gleichung entsprechen ein zu sich zugeordneter Punkt und eine zu sich zugeordnete Ebene. Diesen Punkt und diese Ebene führt man in das Koordinaten-Tetraeder ein. Weitere Bedingungen zwischen den Koefficienten ergeben sich dann daraus, dafs eine oder zwei Wurzeln mehrfache Wurzeln sind. Man stelle hiernach die charakteristischen Gleichungen für die verschiedenen Arten von kollinearen Transformationen auf.

4) Welchen Bedingungen müssen die Koefficienten a_{ik} in den Gleichungen (1) genügen, damit

a) die Form $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$

b) die Form $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

nur mit einem konstanten Faktor multipliziert wird?

Man bestimme in beiden Fällen die sich selbst entsprechenden Punkte und Ebenen.

5) a) Die Schnittpunkte entsprechender Strahlen in zwei kollinearen Strahlenbündeln erzeugen eine kubische Raumkurve.

α) Durch den Schnitt einer beliebigen Ebene mit den beiden Strahlenbündeln wird diese kollinear auf sich selbst bezogen; dabei fallen aber nur drei Punkte mit ihren entsprechenden Punkten zusammen.

β) Jeder Punkt auf einem Strahle des ersten Bündels wird durch die Gleichungen dargestellt:

$$\varrho x_\alpha = \xi_\alpha + \lambda_1 a_\alpha + \lambda_2 b_\alpha + \lambda_3 c_\alpha.$$

Jeder Punkt auf dem entsprechenden Strahle hat die Koordinaten:

$$\sigma y_\alpha = \mu \eta_\alpha + \lambda_1 a_\alpha' + \lambda_2 b_\alpha' + \lambda_3 c_\alpha'.$$

Für einen Schnittpunkt mufs sein $y_\alpha = \omega x_\alpha$. Dann kann man μ, λ_1, λ_2, λ_3 durch ω vermittelst Gleichungen vom dritten Grade ausdrücken.

b) Die Schnittlinien entsprechender Ebenen in zwei kollinearen Strahlenbündeln sind Sekanten an eine Raumkurve dritter Ordnung.

(Durch die in den beiden einander entsprechenden Ebenen gelegenen Strahlen wird auch ihre Schnittlinie projektiv auf sich selbst bezogen.)

6) Die kollineare Verwandtschaft heifst affin, wenn die unendlichferne Ebene sich selbst entspricht.

a) Bei der affinen Zuordnung zweier Räume entspricht einem Paare paralleler Ebenen wiederum ein Paar paralleler Ebenen.

b) Giebt es Stellungen von Ebenen, welche hierbei ungeändert bleiben?

c) Wann erhält eine gerade Linie hierbei eine zu ihrer Anfangsrichtung parallele Richtung?

7) a) In einer räumlichen Reciprocität giebt es i. a. vier Punkte, denen dieselbe Ebene entspricht, mag man sie dem ersten oder dem zweiten Raume angehören lassen.

(Für jeden solchen Punkt müssen die Gleichungen erfüllt sein:

$$a_{11}(1-\omega)x_1 + (a_{12} - a_{21}\omega)x_2 + (a_{13} - a_{31}\omega)x_3 + (a_{14} - a_{41}\omega)x_4 = 0$$

. . . . . .

$$(a_{41} - \omega a_{14})x_1 + (a_{42} - \omega a_{24})x_2 + (a_{43} - \omega a_{34})x_3 + a_{44}(1-\omega)x_4 = 0).$$

b) Jeder dieser vier Punkte liegt in der zugeordneten Ebene.

c) Man untersuche speciell die folgende reciproke Zuordnung:

$$\varrho u_1' = a_{12}x_2,\ \varrho u_2' = a_{21}x_1,\ \varrho u_3' = a_{34}x_4,\ \varrho u_4' = a_{43}x_3.$$

8) a) Die Punkte, welche in den ihnen entsprechenden Ebenen liegen, gehören i. a. einer Fläche zweiter Ordnung an, deren Gleichung für die reciproke Zuordnung (3) die Form hat:

$$\Sigma a_{ik}x_i x_k = 0.$$

b) Die Ebenen, in denen die ihnen entsprechenden Punkte liegen, umhüllen eine Fläche zweiter Klasse, deren Gleichung für die durch die Gleichungen (3)—(6) gegebene Zuordnung die Form annimmt:

$$\Sigma A_{ik}u_i u_k = 0.$$

c) Diese beiden Flächen sind i. a. nicht identisch, weil den Punkten der Fläche a) i. a. nicht ihre Tangentialebenen entsprechen. Man zeige dies auch durch Rechnung.

d) Man gebe die beiden Flächen für die in Üb. 7) c) aufgestellte Transformation an.

e) Die Beziehung der beiden Flächen zu den in Üb. 7) angegebenen Punkten und Ebenen soll allgemein untersucht werden.

9) Man untersuche dasjenige Polarsystem, dessen Ordnungsfläche die Gleichung hat:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0.$$

10) a) In einem ebenen Polarsystem schneiden die den drei Eckpunkten eines Dreiecks zugeordneten Polaren je die Gegenseiten in drei Punkten, die in gerader Linie liegen.

(Wenn die Zuordnung durch die Gleichung vermittelt wird:

$$\varrho u_\alpha = \sum_\varkappa a_{\alpha\varkappa} x_\varkappa \text{ und } a_{\iota\varkappa} = a_{\varkappa\iota}$$

ist, so trifft die gerade Linie $a_{12}a_{13}x_1 + a_{21}a_{23}x_2 + a_{31}a_{32}x_3 = 0$ jede Seite des Koordinatendreiecks in demselben Punkte wie die Polare des Gegenpunktes.)

Man untersuche auch den speciellen Fall, wo etwa $a_{12} = a_{13} = 0$ ist.

b) Durch die zu zwei Punkten zugeordneten Geraden und einen Punkt auf der Polare eines dritten Punktes ist ein ebenes Polarsystem i. a. eindeutig bestimmt.

(Die Polaren der beiden ersten Punkte bestimmen auch einen Punkt auf der Polare des dritten Punktes.)

c) Welche Ausnahmen erleidet der Satz b)?

d) Wenn die Seiten eines Dreiecks die Polaren zu den Eckpunkten eines zweiten Dreiecks sind, so liegen sie perspektivisch zu einander (d. h. entsprechende Eckpunkte liegen in drei durch einen Punkt gehenden Geraden und entsprechende Seiten schneiden einander in drei Punkten einer geraden Linie).

11) a) Konstruiert man, nachdem ein räumliches Polarsystem gegeben ist, auf jeder Seitenfläche eines Tetraeders die Schnittlinie mit der Polarebene der Gegenecke, sowie die gerade Verbindungslinie der Punkte, in denen die in dieser Ebene gelegenen Kanten je von den in dieser Ebene liegenden Eckpunkten geschnitten werden, so gehören die acht so erhaltenen Geraden einer Fläche zweiter Ordnung an.

(Die Fläche:

$$a_{12}a_{13}a_{14}x_1^2 + \ldots + (a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})(a_{12}x_1x_2 + a_{34}x_3x_4) + \ldots = 0$$

schneidet die Ebene $x_1 = 0$ in den Geraden

$$a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = 0 \text{ und}$$
$$a_{23}a_{24}x_2 + a_{32}a_{34}x_3 + a_{42}a_{43}x_4 = 0;$$

die erstere ist die Schnittlinie mit der Polarebene des Punktes (1, 0, 0, 0); die zweite entspricht der in Üb. 10) a) angegebenen Geraden.)

b) Welche mit dem Koordinaten-Tetraeder in Verbindung stehenden Linien gehören der Fläche an:

$$(a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23})(a_{12}x_3x_4 + a_{34}a_{12}) + (a_{14}a_{32} - a_{12}a_{34})(a_{13}x_2x_4 + a_{24}x_1x_3) + (a_{12}a_{43} - a_{13}a_{42})(a_{14}x_2x_3 + a_{23}x_1x_4) = 0?$$

c) Man untersuche demnach die gegenseitige Lage von zwei einander in einem Polarsystem zugeordneten Tetraeder?

d) Welche Besonderheiten treten ein, wenn etwa

$$a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23} = 0$$

ist? Welche, wenn zugleich

$a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23} = 0$ und $a_{14}a_{32} - a_{12}a_{34} = 0$ ist?

e) Nachdem in einem Polarsystem zu zwei Punkten die Polarebenen gegeben sind, kann man zu jedem dritten Punkte einen Punkt der Polarebene finden [Üb. 10) a)].

f) Sobald in einem räumlichen Polarsysteme zu drei Punkten die Polarebenen gegeben sind, kann man zu jedem vierten Punkte eine gerade Linie konstruieren, durch welche seine Polarebene hindurchgehen muſs [Üb. a)].

g) Man gebe diejenigen Sätze an, welche den in e) und f) aufgestellten dual entsprechen.

h) Man kann ein räumliches Polarsystem dadurch bestimmen, daſs man zu zwei Punkten die Polarebenen willkürlich wählt, dann eine gerade Linie angiebt, durch welche die Polarebene eines dritten Punktes gehen soll, und endlich festsetzt, daſs die Polarebene eines vierten Punktes durch einen bestimmten Punkt gehen soll.

Wie darf der zweite, dritte, vierte Punkt nicht angenommen werden; welche Lage hat man für die zweite Ebene, die zur Bestimmung der dritten Ebene benutzte Gerade, den zur Bestimmung der vierten Ebene benutzten Punkt auszuschlieſsen?

i) Wie darf man den in h) gemachten Angaben entsprechend die Pole von vier Ebenen der Reihe nach bestimmen?

12) a) Durch ein räumliches Polarsystem wird für jede gerade Linie eine Involution der auf ihr gelegenen Punkte und der durch sie hindurchgehenden Ebenen erzeugt?

Welche Ausnahme erleidet der Satz?

b) Die Hauptpunkte dieser Punktinvolution liegen in der

Ordnungsfläche, und die Hauptebenen der Ebeneninvolution berühren diese Fläche.

c) Sobald das räumliche Polarsystem gegeben ist, mufs auch seine Ordnungsfläche als bekannt angesehen werden.

d) Demnach darf man eine Fläche zweiter Ordnung bestimmen durch ein Polartetraeder und die Polarebene eines beliebigen Punktes.

13) a) Wenn zwischen den Koefficienten in den Gleichungen (3) die Beziehungen bestehen:

$$a_{\iota\iota} = 0, \quad a_{\iota x} + a_{x\iota} = 0,$$

so liegt jeder Punkt in der ihm entsprechenden Ebene (Nullsystem).

b) Welche einfache Form nehmen die Koefficienten in den Gleichungen (5) an?

c) Die Beziehung kann als involutorisch betrachtet werden, da es gleichgültig ist, welchem der beiden Räume man jeden Punkt und jede Ebene zuweist.

d) Auch die Geraden des Raumes werden einander reciprok in der Weise zugeordnet, dafs die sämtlichen Ebenen, welche den Punkten der einen Geraden entsprechen, jedesmal durch die andere hindurchgehen.

e) Jede Gerade, welche durch einen beliebigen Punkt des Raumes in seiner Polarebene gezogen wird, ist zu sich selbst konjugiert. Durch jeden Punkt des Raumes gehen unendlich viele zu sich selbst zugeordnete Gerade, und alle diese liegen in einer Ebene. Umgekehrt enthält jede Ebene unendlich viele sich selbst entsprechende gerade Linien, und diese bilden einen Strahlenbüschel.

f) Sobald eine Gerade zwei einander zugeordnete Geraden schneidet, entspricht sie sich selbst.

g) Zwei einander zugeordnete Strahlen können einander nicht schneiden; sobald sie einen Punkt gemeinschaftlich haben, fallen sie zusammen.

h) Zwei Paare entsprechender Strahlen gehören derselben Geradenschar einer Fläche zweiter Ordnung an; alle Geraden der andern Schar auf dieser Fläche sind zu sich selbst konjugiert.

§ 27.

Projektivität und Metrik.

Wir unterscheiden projektive und metrische Eigenschaften der Raumgebilde. Auf die erste Klasse beziehen sich gröſstenteils die bisher in diesem Bande durchgeführten Untersuchungen, nämlich alle diejenigen, bei denen auf die unendlichferne Ebene keine Rücksicht genommen wurde. Hierbei handelte es sich vielfach darum, ob ein Gebilde ganz oder zum Teile einem andern angehört, ob mehreren Gebilden Punkte oder Tangentialebenen gemeinschaftlich sind; dabei wurden die Doppelverhältnisse berücksichtigt, namentlich der wichtige Specialfall derselben, die harmonische Teilung. Dagegen kam es hierbei gar nicht auf die Länge der Strecken und die Gröſse der Winkel an.

Um den Charakter der projektiven Eigenschaften scharf festzustellen, nehmen wir am besten die kollineare Zuordnung des Raumes zu Hilfe. Wir dürfen alsdann sagen, Eigenschaften seien projektiv, wenn sie sich bei keiner kollinearen Umgestaltung des Raumes ändern.

Führen wir z. B. eine eigentliche geradlinige Fläche zweiter Ordnung Φ durch eine kollineare Umgestaltung des Raumes in eine andere Fläche Φ' über, so ist die letztere ebenfalls eine eigentliche Fläche zweiter Ordnung mit geraden Linien. Bei derselben Umgestaltung möge der Punkt P des Raumes in P' und die Polarebene Π von P in Bezug auf Φ in eine Ebene Π' umgewandelt werden; dann ist jedesmal für die Fläche Φ' die Ebene Π' die Polarebene des Punktes P'.

Ordnung und Klasse einer Fläche und Kurve, Durchschneiden und Berühren, die Frage, ob gerade Linien in einer Fläche enthalten sind oder nicht, gehören deshalb der Projektivität an; aber auch die ganze Theorie der Doppelverhältnisse muſs ihr zugewiesen werden.

Dagegen werden diejenigen Eigenschaften als metrische bezeichnet, welche nicht bei allen kollinearen Umgestaltungen ungeändert bleiben. Zuvörderst bevorzugt die Metrik die unendlichferne Ebene als ein uneigentliches Gebilde vor den übrigen Ebenen, während man diese Ebene kollinear auf jede andere Ebene beziehen kann. Demgemäſs gehört die

Lehre vom Mittelpunkt einer Fläche zweiter Ordnung und von den konjugierten Durchmessern der Metrik an. Die Messung im eigentlichen Sinne ist ein metrischer Prozefs, da die Metrik Rücksicht nehmen mufs auf die Länge der Strecken, die Gröfse der Winkel, auf Flächen- und räumlichen Inhalt. Nur die kongruente Umgestaltung des Raumes läfst alle metrischen Eigenschaften eines Gebildes ungeändert.

Zwischen Projektivität und Metrik besteht hiernach in den Resultaten ein durchgreifender Unterschied; aber dieser Unterschied tritt bei den grundlegenden Untersuchungen ganz zurück. Alle unsere Beweise beruhen in ihrem tiefsten Grunde auf der Definition der Koordinaten. Diese wurden eingeführt als Längen von Strecken, die noch mit gewissen konstanten Faktoren multipliziert wurden. Bei einem solchen Ausgangspunkte werden metrische Eigenschaften zur Grundlage der Projektivität gemacht. Zwar sahen wir nachträglich, dafs wir nur die Verhältnisse der Koordinaten zu berücksichtigen brauchen und dafs wir diese als Doppelverhältnisse auffassen dürfen; aber bei der Definition der Doppelverhältnisse benutzten wir wieder die Längen von Strecken und die Gröfsen der Winkel. So bildet für uns die Metrik zugleich die wahre Grundlage der Projektivität. Es liegt also die Frage nahe, ob es nicht möglich ist, auch in der Begründung die Metrik zu entbehren und die Projektivität selbständig aufzubauen. Das ist in der That den Bemühungen der Geometer gelungen; aber die Art der Ausführung darzulegen, geht über die Grenzen hinaus, welche wir uns für das vorliegende Werk stecken mufsten. Nur das Ergebnis wollen wir dahin formulieren, dafs wir sagen, die Projektivität sei die Gesamtheit der geometrischen Sätze, die sich einzig aus den Voraussetzungen ergeben, dafs durch je zwei Punkte eine gerade Linie und durch jede Gerade und einen ihr nicht angehörenden Punkt eine Ebene gelegt werden kann.

Die soeben durchgeführten Erwägungen sind geeignet, ein Bedenken zu beseitigen, das sich bei der Einführung der Tetraeder-Koordinaten aufdrängen mufs. Aus den Elementen der analytischen Geometrie ist bekannt, dafs drei Strecken genügen, um die Lage eines jeden Punktes im Raume zu bestimmen; es mufs daher dem Anfänger als eine unnötige Erschwerung erscheinen, dafs er gezwungen wird, vier verschiedene Strecken zu benutzen.

Zwar überzeugt er sich allmählich, dafs auch die neuen Koordinaten ein ganz geeignetes Werkzeug zur Untersuchung des Raumes abgeben; auch mufs die Symmetrie der Formeln ihn bald die neue Behandlungsweise liebgewinnen lassen; namentlich mufs er bald das Übergewicht der neuen Methode in den allgemeinen Resultaten erkennen, die jedesmal durch Specialisierung zu einer grofsen Reihe von Einzelsätzen führen. Dennoch wird der Anfänger vielleicht nicht so bald zur vollen Klarheit über den wahren Grund für die Einführung dieser Koordinaten kommen. Dieser liegt darin, dafs die Cartesischen Koordinaten die unendlichferne Ebene vor den übrigen Ebenen bevorzugen und daher in alle rein projektiven Untersuchungen ein fremdes Element hineinbringen, das erst nachträglich wieder entfernt werden mufs. Die projektiven Eigenschaften können nur dann auf direktem Wege erhalten werden, wenn man Tetraeder-Koordinaten benutzt.

Überhaupt darf man folgende Regel aufstellen. Wenn man die Projektivität vermittelst der Analysis behandeln will, so gebraucht man am besten Tetraeder-Koordinaten. Wenn man aber umgekehrt auf alle metrischen Eigenschaften Rücksicht nehmen will, so eignet sich vor allem das rechtwinklige Koordinatensystem Descartes'; der Übergang von einem solchen System zu einem andern derselben Art läfst sogar, falls man auch dieselbe Längeneinheit zu Grunde legt, alle metrischen Eigenschaften ungeändert. Zuweilen will man aber nur einzelne Eigenschaften der Metrik beachten und andere unberücksichtigt lassen; dann kann es von Vorteil sein, andere Koordinaten zu benutzen. Wenn es sich z. B. nur um die Längen von Strecken, aber nicht um die Gröfse der Winkel handelt, so gewährt der Gebrauch schiefwinkliger Cartesischer Koordinaten zuweilen beträchtlichen Nutzen; in dieser Hinsicht sei an § 19 erinnert, wo wir mit Hilfe schiefwinkliger Koordinaten die einzelnen Arten von Flächen zweiter Ordnung leicht charakterisieren konnten.

Die Projektivität ist nicht nur an sich wichtig, sondern gewährt auch der Metrik viele Vorteile. Schon der Umstand ist nicht gering anzuschlagen, dafs metrische Sätze vielfach aus rein projektiven durch blofse Specialisierung hergeleitet werden. Die Theorie vom Mittelpunkte und den konjugierten Durchmessern einer Fläche zweiter Ordnung bildet nur einen ganz speciellen

Fall der allgemeinen Polareigenschaften. Der Cylinder erscheint nur als ein Kegel, dessen Scheitel in die unendlichferne Ebene gerückt ist; die Eigenschaften des Cylinders bedürfen keiner gesonderten Herleitung, sondern ergeben sich unmittelbar aus denen des Kegels. Dadurch wird nicht nur eine bedeutende Vereinfachung herbeigeführt, sondern es erhält auch jeder Satz seine richtige Stelle im System der Wissenschaft. Vielleicht noch gröfser ist aber der Vorteil, den die Projektivität der Geometrie dadurch gewährt, dafs sie für rein metrische Probleme die geeignetsten Methoden angiebt; indem sie metrische Fragen ihres speciellen Charakters entkleidet und allgemeinen Principien unterordnet, zeigt sie den einfachsten und natürlichsten Weg zu ihrer Beantwortung.

In den beifolgenden Übungen sind bereits einige Probleme der Metrik angegeben, die sich an frühere Untersuchungen in einfacher Weise anschliefsen. Die folgenden Paragraphen sollen dann solche Probleme dieser Art behandeln, welche weitläufigere Erörterungen notwendig machen. Überall wollen wir uns aber bemühen, die Beziehung zur Projektivität deutlich hervortreten zu lassen.

Übungen:

1) a) Der geometrische Ort des Punktes, für den das Produkt der senkrechten Abstände von zwei Seitenflächen eines Tetraeders zu dem Produkte der Abstände von den beiden andern Seitenflächen in einem gegebenen Verhältnisse steht, ist eine Fläche zweiter Ordnung.

(Man betrachte in der Gleichung $x_1 x_2 = \varkappa x_3 x_4$ die Koordinaten als die senkrechten Abstände von den gegebenen Ebenen.)

b) Alle Flächen, welche man auf dem angegebenen Wege dadurch erhält, dafs man nur das Verhältnis sich ändern läfst, gehören einem Büschel an, dessen Grundkurve durch ein windschiefes Viereck gebildet wird.

c) Diejenigen Ebenen, für welche das Produkt der Abstände von zwei gegebenen Punkten zum Produkte der Abstände von zwei andern festen Punkten in einem gegebenen Verhältnisse steht, umhüllen eine Fläche zweiter Ordnung.

d) Die unter a) und c) angegebenen Flächen werden identisch, falls die vier Punkte die Eckpunkte des von den vier Ebenen

eingeschlossenen Tetraeders sind. In welcher Beziehung müssen die konstanten Verhältnisse zu einander stehen?

(Wenn die Koordinaten $x_1 \ldots x_4$ mit den in § 2 eingeführten Gröfsen $p_1 \ldots p_4$ identisch werden, so haben die zugehörigen Ebenenkoordinaten $u_1 \ldots u_4$ die Bedeutung $r_1 : h_1 \ldots r_4 : h_4$, wo $r_1 \ldots r_4$ die in § 4 benutzten senkrechten Abstände sind.)

2) a) Im Tetraeder $O_1O_2O_3O_4$ seien I, II, III, IV die Seitenflächen, $h_1 \ldots h_4$ die Höhen, α_{12}, $\alpha_{13} \ldots$ die Cosinus der von je zwei Ebenen eingeschlossenen Winkel ($\alpha_{12} = \cos(\mathrm{I\,II})$ u. s. w.). Die von einem beliebigen Punkte der Höhe h_4 auf die Ebenen I, II, III gefällten Senkrechten verhalten sich wie $\alpha_{14} : \alpha_{24} : \alpha_{34}$ u. s. w. Indem man als Koordinaten eines Punktes die von ihm auf die Ebenen gefällten Senkrechten wählt, soll die Gleichung derjenigen Fläche zweiter Ordnung bestimmt werden, welche durch drei Höhen des Tetraeders geht. Man zeige, dafs die Fläche auch die vierte Höhe enthält.

(Indem wir den Ausdruck $\alpha_{\iota\lambda}\alpha_{\varkappa\mu} - \alpha_{\iota\mu}\alpha_{\varkappa\lambda}$ kurz durch $(\iota\varkappa\lambda\mu)$ bezeichnen, können wir die Gleichung in der Form schreiben:

$$(1234)(\alpha_{34}x_1x_2 + \alpha_{12}x_3x_4) + (1342)(\alpha_{42}x_1x_3 + \alpha_{13}x_4x_2) + (1423)(\alpha_{23}x_1x_4 + \alpha_{14}x_2x_3) = 0.)$$

b) Man suche die geometrische Bedeutung der Ausdrücke $(\iota\varkappa\lambda\mu)$; man weise nach, dafs (1234) nur gleich null werden kann, wenn die Kanten O_1O_2 und O_3O_4 auf einander senkrecht stehen.

c) Die Bedingung dafür, dafs die Höhen h_1 und h_2 einen Punkt gemein haben, ist identisch damit, dafs auch die beiden andern Höhen einander schneiden. Man deute die Bedingungsgleichung geometrisch und leite daraus einen Satz der Stereometrie ab.

d) Sobald zwei Paare von Gegenkanten rechtwinklig zu einander geneigt sind, gilt dasselbe für die Kanten des dritten Paares. In diesem Falle gehen die vier Höhen durch einen Punkt.

4) a) Indem man wieder unter $x_1 \ldots x_4$ die senkrechten Abstände von den Ebenen des Tetraeders $O_1O_2O_3O_4$ versteht und mit $\alpha_{\iota\varkappa}$ den Cosinus des Neigungswinkels je zweier seiner Ebenen bezeichnet, zugleich aber den senkrechten Abstand des Punktes (x) von der Kante O_3O_4 gleich l_{34} u. s. w. setzt, folgt die Beziehung:

$$(1 - \alpha_{12}^2)\, l_{34}^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2\alpha_{12}x_1x_2.$$

b) Man gebe hiernach die Gleichung der Fläche an, für deren Punkte die Abstände von den Kanten O_1O_2 und O_3O_4 in einem vorgeschriebenen Verhältnisse stehen.

c) Da es sich bei dieser Fläche bloſs um die Kanten O_1O_2 und O_3O_4 handelt, dürfen wir annehmen, daſs die beiden Ebenen I und II, sowie III und IV je auf einander senkrecht stehen. Wie vereinfacht sich hiernach die Gleichung der Fläche? Man leite hieraus Eigenschaften derselben her.

d) Nachdem die Fläche gegeben ist, kann die Kante O_1O_2 durch jede andere Gerade ersetzt werden, welche mit der Fläche keinen Punkt gemeinschaftlich hat. Welche Lage hat man jetzt der zweiten Geraden zu geben?

e) Man untersuche dieselbe Fläche unter Benutzung von rechtwinkligen Cartesischen Koordinaten, indem man die z-Axe mit der Geraden zusammenfallen läſst, welche die beiden gegebenen Linien senkrecht schneidet, den Anfangspunkt mitten zwischen die Fuſspunkte der gemeinsamen Senkrechten legt und der (xz)- und der (yz)-Ebene gleiche Neigung zu den beiden gegebenen Geraden giebt.

5) a) Wenn u_1, u_2, u_3 homogene Linienkoordinaten in einer Ebene sind, so stellt die Gleichung $u_1 u_2 = \alpha u_3^2$ einen Kegelschnitt dar, welcher von zwei Koordinatenaxen in ihren Schnittpunkten mit der dritten Axe berührt wird. Wählt man den Schnittpunkt der beiden Tangenten unendlichfern, so darf man die Quotienten $u_1 : u_3$ und $u_2 : u_3$ als Schweringsche Koordinaten auffassen (I § 11, 2 S. 64) und gelangt zu dem Satze:

Auf den beiden in den Endpunkten eines Durchmessers an einen Kegelschnitt gelegten Tangenten werden von allen weiteren Tangenten Strecken abgeschnitten, deren Produkte konstant sind.

b) Hiernach konstruiere man beliebig viele weitere Tangenten eines Kegelschnittes, von welchem zwei parallele Tangenten, ihre Berührungspunkte und eine weitere Tangente gegeben sind.

c) Man benutze die Gleichung, um weitere Eigenschaften des Kegelschnittes herzuleiten. Speciell suche man den Berührungspunkt der gegebenen dritten Tangente.

6) a) Jeden Kegelschnitt, der einen Mittelpunkt hat, kann man unter Benutzung Schweringscher Koordinaten in der Form darstellen: $u^2 - v^2 = a^2$.

b) Wie hat man die Koordinaten zu wählen, damit die Gleichung einer gegebenen Hyperbel die Form annimmt:

$$u^2 + v^2 = a^2?$$

c) Man leite aus den angegebenen Gleichungen weitere Eigenschaften der Kegelschnitte her.

7) a) Wie müssen die Schweringschen Ebenenkoordinaten (II § 8, 3 S. 54) gewählt werden, damit die Gleichung einer Fläche zweiter Klasse die Form erhält:

$$\alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2 = 1?$$

b) Welche Flächen können durch die angegebene Gleichung dargestellt werden? Welche Bedeutung haben die Koefficienten α, β, γ? Für welche Flächen haben sie sämtlich einen positiven Wert? Wie müssen die Koordinatenaxen gewählt werden, damit die Koefficienten wenigstens dem absoluten Betrage nach gleich werden?

c) Man wähle eine Durchmesserebene und drei Ebenen, welche je in einem Punkte der ersten Ebene berühren, zu Koordinatenebenen. Für dies System stelle man die Gleichung der Fläche auf und gebe ihre geometrische Bedeutung an.

4) a) In einem einschaligen Hyperboloid wähle man zwei parallele Erzeugende und eine beliebige Tangentialebene und ziehe durch den Berührungspunkt die Parallele zu den gewählten Erzeugenden. Auf diesen beiden Geraden schneidet eine beliebige Tangentialebene Stücke ab, deren Produkt gleich ist dem mit einer festen Konstanten multiplizierten Abschnitte auf der gezogenen Parallelen, wo die Abschnitte sämtlich von der festen Tangentialebene aus gemessen werden.

(Die Gleichung $u_1 u_2 = a u_3 u_4$ geht unter Benutzung Schweringscher Koordinaten über in $uv = aw$.)

b) Man gehe zu Punktkoordinaten über und erkläre die neue Gleichung unter Benutzung von § 8, 2 (S. 53).

§ 28.

Kugel und Kugelkreis.

1. In den folgenden Paragraphen benutzen wir rechtwinklige Koordinaten, wollen dieselben aber, um die Beziehung zu den allgemeinen Koordinaten deutlicher hervortreten zu lassen, vielfach

x_1, x_2, x_3, x_4 schreiben. Für einen eigentlichen Punkt dürfen wir $x_4 = 1$ setzen und $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ als die rechtwinkligen Cartesischen Koordinaten auffassen. Dagegen haben wir für unendlichferne Punkte $x_4 = 0$ anzunehmen. Die Koordinaten u_1, u_2, u_3, u_4 werden auf die in § 8, 9 (S. 57) angegebene Weise bestimmt; es stellen also u_1, u_2, u_3 die Cosinus der Winkel dar, welche die vom Anfangspunkte auf die Ebene gefällte Senkrechte mit den Axen bildet, und u_4 ist gleich dem Abstande des Anfangspunktes von der Ebene. Hiernach besteht bekanntlich zwischen u_1, u_2, u_3 die Beziehung:

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1,$$

und der Ausdruck

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + u_4$$

giebt den Abstand des Punktes $(x_1, x_2, x_3, 1)$ von der Ebene (u_1, u_2, u_3, u_4) an.

Demnach genügen alle Tangentialebenen (u) einer Kugel mit dem Mittelpunkte $(a_1, a_2, a_3, 1)$ und dem Radius ϱ der Gleichung:

$$(1) \quad a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + u_4 = \varrho.$$

Dieselbe Gleichung wird durch die Gleichung dargestellt:

$$(2) \quad a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + u_4 = -\varrho.$$

Indem wir ϱ als eine positive Gröfse voraussetzen, haben wir für die Gleichung (1) den Mittelpunkt auf der positiven und für die Gleichung (2) auf der negativen Seite einer jeden Tangentialebene anzunehmen.

2. Wir ersetzen die linke Seite der Gleichung (1) durch das Zeichen A; dann ist die Gleichung $A = 0$ die Normalform für die Gleichung des Punktes $(a_1, a_2, a_3, 1)$. Die Gleichungen (1) und (2) schreiben wir kurz

$$(3) \quad A = \pm \varrho.$$

Ist $B = 0$ die Gleichung eines zweiten Punktes ebenfalls in der Normalform, so wird durch die Gleichung

$$(4) \quad B = \pm \sigma$$

eine zweite Kugel dargestellt.

Der Gleichung:

$$(5) \quad A : B = \varrho : \sigma \text{ oder } \frac{A}{\varrho} - \frac{B}{\sigma} = 0$$

genügen alle Ebenen, für welche die Mittelpunkte auf derselben

Seite liegen und deren Abstände von diesen sich wie die Radien verhalten. Da die Gleichung (5) homogen linear ist, stellt sie einen Punkt dar, der in der Centrale liegt und die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte nach dem Verhältnisse $-\varrho : \sigma$ teilt. Nun wird die Gleichung (5) befriedigt, wenn die Gleichungen (3) und (4) bei gleichem Vorzeichen erfüllt sind. Durch den Punkt (5), den äufsern Ähnlichkeitspunkt der Kugeln, gehen also alle diejenigen gemeinschaftlichen Tangentialebenen der beiden Kugeln, gegen welche die Mittelpunkte auf derselben Seite liegen.

Ebenso stellt die Gleichung

$$(7)\quad \frac{A}{\varrho} + \frac{B}{\sigma} = 0$$

denjenigen Punkt der Centrale dar, in welchem dieselbe nach dem positiven Verhältnisse der Radien geteilt wird. Durch diesen Punkt, den innern Ähnlichkeitspunkt der Kugeln, gehen alle diejenigen gemeinsamen Tangentialebenen, denen gegenüber die Mittelpunkte auf verschiedenen Seiten liegen.

Alle gemeinsamen Tangentialebenen zweier Kugeln gehen durch zwei Punkte der Centrale, den äufsern und den innern Ähnlichkeitspunkt.

3. Es seien jetzt drei Kugeln K_1, K_2, K_3 gegeben. Die Gleichungen ihrer Mittelpunkte in der Normalform seien symbolisch $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_3 = 0$; die Radien seien ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3; dann können wir die Gleichungen der Kugeln in der Form schreiben:

$$A_1 = \pm \varrho_1,\ A_2 = \pm \varrho_2,\ A_3 = \pm \varrho_3.$$

Die Ähnlichkeitspunkte der Kugeln K_2 und K_3 seien A_{23} und I_{23}, die der Kugeln K_1 und K_3 seien A_{13} und I_{13} und ebenso die von K_1 und K_2 die Punkte A_{12} und I_{12}. Die äufsern Ähnlichkeitspunkte A_{23}, A_{31}, A_{12} haben der Reihe nach die Gleichungen:

$$\varrho_3 A_2 - \varrho_2 A_3 = 0,\ \varrho_1 A_3 - \varrho_3 A_1 = 0,\ \varrho_2 A_1 - \varrho_1 A_2 = 0,$$

und für die innern Ähnlichkeitspunkte I_{23}, I_{31}, I_{12} gelten die Gleichungen:

$$\varrho_3 A_2 + \varrho_2 A_3 = 0,\ \varrho_1 A_3 + \varrho_3 A_1 = 0,\ \varrho_2 A_1 + \varrho_1 A_2 = 0.$$

Die drei äufsern Ähnlichkeitspunkte liegen auf der Geraden:

$$\frac{A_1}{\varrho_1} = \frac{A_2}{\varrho_2} = \frac{A_3}{\varrho_3},$$

Ebenso liegen die beiden innern Ähnlichkeitspunkte I_{23} und I_{31} mit dem äußern Ähnlichkeitspunkte A_{12} auf der Geraden:

$$\frac{A_1}{\varrho_1} = \frac{A_2}{\varrho_2} = -\frac{A_3}{\varrho_3}.$$

Überhaupt liegen jedesmal zwei innere Ähnlichkeitspunkte mit dem dritten äußern Ähnlichkeitspunkte in gerader Linie.

Die sechs Ähnlichkeitspunkte von drei Kugeln bilden die Eckpunkte eines vollständigen Vierseits, dessen Diagonalen sich paarweise in einem der drei Mittelpunkte schneiden.

4. Ähnliche Beziehungen gelten für vier Kugeln:

$$A_1 = \pm\varrho_1,\ A_2 = \pm\varrho_2,\ A_3 = \pm\varrho_3,\ A_4 = \pm\varrho_4.$$

Die Ähnlichkeitspunkte mögen in derselben Weise wie eben bezeichnet werden. Alsdann enthält die Ebene

$$\frac{A_1}{\varrho_1} = \frac{A_2}{\varrho_2} = \frac{A_3}{\varrho_3} = \frac{A_4}{\varrho_4}$$

die sechs äußern Ähnlichkeitspunkte A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{23}, A_{24}, A_{34}. Ebenso liegen in der Ebene

$$\frac{A_1}{\varrho_1} = \frac{A_2}{\varrho_2} = \frac{A_3}{\varrho_3} = -\frac{A_4}{\varrho_4}$$

die drei äußern Ähnlichkeitspunkte A_{12}, A_{13}, A_{23} und die drei innern Ähnlichkeitspunkte I_{14}, I_{24}, I_{34}. Endlich gehören die zwei äußern Ähnlichkeitspunkte A_{12} und A_{34} mit den vier innern Ähnlichkeitspunkten I_{13}, I_{14}, I_{23}, I_{24} der Ebene an

$$\frac{A_1}{\varrho_1} = \frac{A_2}{\varrho_2} = -\frac{A_3}{\varrho_3} = -\frac{A_4}{\varrho_4}.$$

Aus den zwölf Ähnlichkeitspunkten können auf acht verschiedene Weise sechs herausgenommen werden, die in einer Ebene liegen, und zwar

a) die sechs äußern Ähnlichkeitspunkte,

b) drei äußere und drei innere, nämlich

$I_{12}, I_{13}, I_{14}, A_{23}, A_{24}, A_{34}$
$I_{21}, I_{23}, I_{24}, A_{13}, A_{14}, A_{34}$
$I_{31}, I_{32}, I_{34}, A_{12}, A_{14}, A_{24}$
$I_{41}, I_{42}, I_{43}, A_{12}, A_{13}, A_{23}.$

c) zwei äußere und vier innere:

$$A_{12},\ A_{34},\ I_{13},\ I_{14},\ I_{23},\ I_{24}$$
$$A_{13},\ A_{24},\ I_{12},\ I_{14},\ I_{32},\ I_{34}$$
$$A_{14},\ A_{23},\ I_{12},\ I_{13},\ I_{42},\ I_{43}.$$

5. Die Gleichung einer beliebigen Kugel in rechtwinkligen Punktkoordinaten ist

$$(8)\quad (x_1 - ax_4)^2 + (x_2 - bx_4)^2 + (x_3 - cx_4)^2 = r^2x_4^2,$$

wo $x_4 = 0$ die unendlichferne Ebene darstellt. Der Schnitt mit der unendlichfernen Ebene wird also durch die Gleichungen gegeben:

$$(9)\quad x_4 = 0,\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$$

oder auch, wenn wir lieber wollen, durch den Schnitt der unendlichfernen Ebene mit der Fläche $x^2 + y^2 + z^2 = 0$. Diese Linie ist von dem Mittelpunkte und dem Radius ganz unabhängig, also für alle Kugeln dieselbe. Wir dürfen daher sagen:

Alle Kugeln haben mit der unendlichfernen Ebene denselben Kreis, den unendlichfernen imaginären Kugelkreis gemeinschaftlich.

6. Wir schreiben statt

$$(x_1 - ax_4)^2 + (x_2 - bx_4)^2 + (x_3 - cx_4)^2 - r^2x_4^2$$

kurz K und statt

$$(x_1 - a'x_4)^2 + (x_2 - b'x_4)^2 + (x_3 - c'x_4)^2 - r'^2x_4^2$$

kurz K'. Dann stellt die Gleichung $K + \lambda K' = 0$ denjenigen Flächenbüschel dar, der durch die Kugeln $K = 0$ und $K' = 0$ bestimmt wird. Aus der Form der neuen Gleichung ersehen wir den Satz:

Wenn ein Flächenbüschel zweiter Ordnung zwei Kugeln enthält, so sind alle seine Flächen Kugeln.

Dem Büschel gehören ein Ebenenpaar und zwei Kegel an. Das Ebenenpaar $K - K' = 0$ enthält stets die unendlichferne Ebene. Um die Bedeutung der zweiten Ebene zu erkennen, beachten wir, daſs der Ausdruck K für einen eigentlichen Punkt das Quadrat der Tangente darstellt, die von dem Punkte an die Kugel gelegt werden kann. Für einen Innenpunkt nimmt K einen negativen Wert an; es ist dann $-K$ gleich dem Quadrate aus der Hälfte der kleinsten Sehne, welche durch den Punkt gelegt werden kann. Allgemein gilt folgendes: Wenn durch den Punkt P eine Sekante gezogen wird, welche die Kugel in den Punkten A und B trifft,

so ist stets $K = PA \cdot PB$, wo das Produkt der rechten Seite für einen Innenpunkt wegen der entgegengesetzten Richtung von PA und PB einen negativen Wert hat. Dies Produkt nennen wir die Potenz des Punktes in Bezug auf die Kugel. Die Gleichung des Ebenenpaares liefert uns unmittelbar den Satz:

Alle Punkte, für welche zwei Kugeln gleiche Potenzen haben, liegen in einer Ebene, der Potenzebene der Kugeln. Diese Ebene schneidet die Kugeln in demselben Kreise.

7. Wir betrachten vier Kugeln $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $K_3 = 0$, $K_4 = 0$. In den sechs Gleichungen $K_\alpha - K_\beta = 0$ trennen wir den Faktor $x_4 = 0$ ab und betrachten nur die durch den andern Faktor dargestellte Ebene $\Pi_{\alpha\beta}$, die Potenzebene der Kugeln K_α und K_β. Dann erkennen wir unmittelbar, daſs die drei Ebenen Π_{12}, Π_{13}, Π_{23} durch die Gerade $K_1 = K_2 = K_3$ hindurchgehen, und daſs sich die sechs Potenzebenen Π_{12}, Π_{13}, Π_{14}, Π_{23}, Π_{24}, Π_{34} in dem Punkte $K_1 = K_2 = K_3 = K_4$ schneiden.

8. Zu dem Kugelkreis gelangt man auch, wenn man die Kugel als Fläche zweiter Klasse betrachtet. In Ebenenkoordinaten nimmt nämlich die Gleichung der Kugel die Form an:

$$(au_1 + bu_2 + cu_3 + u_4)^2 - r^2(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) = 0.$$

Diese Gleichung erhält man entweder, indem man auf die Gleichung (8) die Vorschrift von § 20, 8 (S. 158) anwendet, oder indem man die Gleichung (1) beiderseits quadriert und auf der rechten Seite den Faktor eins durch $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$ ersetzt.

Zwei konzentrische Kugeln bestimmen eine Flächenschar, deren Gleichung in der Form geschrieben werden kann:

$$(au_1 + bu_2 + cu_3 + u_4)^2 + \lambda(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) = 0.$$

Alle Flächen der Schar sind wieder Kugeln; zu ihnen gehört der gemeinschaftliche Mittelpunkt als Doppelpunkt und die Fläche

$$(10) \quad u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0$$

als eine Grenzfläche. Die letztere ist von der Wahl des Mittelpunktes unabhängig. In Punktkoordinaten wird dieser Kegelschnitt durch die beiden Ebenen

$$x_4 = 0, \; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

dargestellt; er ist also der imaginäre Kugelkreis.

9. Damit die beiden Ebenen (u') und (u'') konjugierte Polarebenen in Bezug auf den imaginären Kugelkreis (10) sind, mufs die Gleichung bestehen:

$$(11)\quad u_1' u_1'' + u_2' u_2'' + u_3' u_3'' = 0.$$

Nun stellen u_1', u_2', u_3' die Richtungscosinus der Normalen dar, welche vom Anfangspunkte des Koordinatensystems auf die Ebene (u') gefällt werden kann; dieselbe Bedeutung haben die Koordinaten u_1'', u_2'', u_3'' für die Ebene (u''). Sind aber λ, μ, ν und λ', μ', ν' die Richtungscosinus zweier Geraden, die den Winkel v mit einander bilden, so ist bekanntlich:

$$\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' = \cos v.$$

Die Gleichung (11) sagt also aus, dafs die beiden Geraden, deren Richtungscosinus (u_1', u_2', u_3') und (u_1'', u_2'', u_3'') sind, auf einander senkrecht stehen. Nun bilden zwei Ebenen denselben Winkel, wie irgend zwei ihrer Senkrechten; somit dürfen wir sagen:

Wenn zwei Ebenen konjugierte Polarebenen in Bezug auf den imaginären Kugelkreis sind, so stehen sie auf einander senkrecht.

10. Wenn (u') und (u'') zwei beliebige eigentliche Ebenen sind, so dürfen wir

$$(12)\quad u_1' u_1'' + u_2' u_2'' + u_3' u_3'' = \cos v$$

setzen, und es giebt v den Winkel an, den die beiden Ebenen mit einander bilden. Die beiden Ebenen $(u' + \omega_1 u'')$ und $(u' + \omega_2 u'')$, welche durch den Schnitt der Ebenen (u') und (u'') gehen, sind Tangentialebenen an den imaginären Kugelkreis, wenn ω_1 und ω_2 die Wurzeln der Gleichung sind:

$$(13)\quad \omega^2 + 2\omega (u_1' u_1'' + u_2' u_2'' + u_3' u_3'') + 1 = 0.$$

Da wir infolge der Gleichung (12) diese Gleichung auch in der Form schreiben können:

$$\omega^2 + 2\omega \cos v + 1 = 0,$$

so dürfen wir setzen:

$$\omega_1 = -\cos v - i \sin v,\quad \omega_2 = -\cos v + i \sin v;$$

es ist also $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\cos v + i \sin v}{\cos v - i \sin v} = (\cos v + i \sin v)^2 = e^{2vi}$, oder

$$(13)\quad v = \frac{ln \frac{\omega_1}{\omega_2}}{2i}.$$

Der Winkel v der beiden Ebenen (u') und (u'') ist also bis auf den konstanten Divisor 2i gleich dem natürlichen Logarithmus des Quotienten aus den beiden Wurzeln ω_1 und ω_2 der Gleichung (13), und dieser Quotient ist gleich dem Doppelverhältnisse, welches die beiden gegebenen Ebenen mit den beiden durch ihre Schnittlinie an den imaginären Kugelkreis gezogenen Tangentialebenen bilden.

Der Winkel zweier Ebenen kann angesehen werden als der durch eine gewisse Konstante dividierte Logarithmus des Doppelverhältnisses, in welchem die gegebenen Ebenen zu den beiden Tangentialebenen stehen, welche durch die Schnittlinie der beiden ersten an den imaginären Kugelkreis gelegt werden können.

11. Zwei unendlichferne Punkte $(x_1', x_2', x_3', 0)$ und $(x_1'', x_2'', x_3'', 0)$ sind konjugierte Pole in Bezug auf den imaginären Kugelkreis, wenn die Gleichung befriedigt wird:

$$(14) \quad x_1' x_1'' + x_2' x_2'' + x_3' x_3'' = 0.$$

Nun kann man die Punkte einer Geraden, die vom Punkte (a, b, c, 1) ausgeht und die Richtungscosinus λ, μ, ν hat, durch die Gleichungen darstellen:

$$x_1 = a + \lambda r, \; x_2 = b + \mu r, \; x_3 = c + \nu r,$$

wo r den Abstand des Punktes $(x_1, x_2, x_3, 1)$ vom Punkte (a, b, c, 1) angiebt. Für den unendlichfernen $(x_1', x_2', x_3', 0)$ dieser Geraden verhält sich

$$x_1' : x_2' : x_3' = \lambda : \mu : \nu.$$

Sind λ', μ', ν' die Richtungscosinus einer zweiten Geraden und ist $(x_1'', x_2'', x_3'', 0)$ ihr unendlichferner Punkt, so gilt auch die Beziehung:

$$x_1'' : x_2'' : x_3'' = \lambda' : \mu' : \nu'.$$

Aus der Gleichung (14) folgt, daſs auch $\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' = 0$ ist, und daraus geht hervor, daſs die beiden gegebenen Geraden, deren unendlichferne Punkte konjugierte Pole in Bezug auf den imaginären Kugelkreis sind, einen rechten Winkel mit einander bilden.

Zwei gerade Linien sind unter einem rechten Winkel zu einander geneigt, wenn ihre unendlichfernen Punkte konjugierte Pole für den imaginären Kugelkreis sind.

Übungen:

1) Die Gleichungen der acht Kugeln, welche vier gegebene Ebenen (a), (b), (c), (d) berühren, lassen sich in folgender Form zusammenfassen:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \pm 1 \\ b_1 & b_2 & b_4 & b_4 & \pm 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \pm 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \pm 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Man untersuche das System dieser Kugeln.

2) a) Wenn für eine Fläche zweiter Ordnung jeder Durchmesser auf der konjugierten Durchmesserebene senkrecht steht, so ist sie eine Kugel.

b) Wenn es für eine Fläche zweiter Ordnung zwei vollständig getrennte Tripel konjugierter Durchmesser giebt, die auf einander senkrecht stehen, so ist sie eine Kugel.

(Es wird angenommen, dafs a, b, c und a', b', c' zwei derartige Tripel sind und dafs keiner der Durchmesser a, b, c mit einem der drei Durchmesser a', b', c' identisch ist. Man zeige, dafs unter dieser Annahme der Schnitt mit der unendlichfernen Ebene der imaginäre Kreis ist.)

3) Um eine andere Einführung des unendlichfernen Kreises zu begründen, erinnern wir an folgendes. Verstehen wir unter $x_1 \ldots x_4$ die senkrechten Abstände von den Ebenen des Koordinaten-Tetraeders und unter $h_1 \ldots h_4$ die Höhen desselben, so gilt für jeden eigentlichen Punkt die Beziehung

$$\frac{x_1}{h_1} + \ldots + \frac{x_4}{h_4} = 1.$$

Durch die Rechnung werden wir aber auch auf Punkte geführt, für welche $\frac{x_1}{h_1} + \ldots + \frac{x_4}{h_4} = 0$ ist; diese müssen wir als uneigentliche Punkte bezeichnen.

Ebenso besteht zwischen den Koordinaten $u_1 \ldots u_4$ einer Ebene, falls man darunter die senkrechten Abstände von den Eckpunkten des Tetraeders versteht, nach § 4, 3 (S. 23) die Beziehung:

$$\frac{u_1^2}{h_1^2} + \ldots + \frac{u_4^2}{h_4^2} - 2\alpha_{12}\frac{u_1 u_2}{h_1 h_2} - \ldots - 2\alpha_{34}\frac{u_3 u_4}{h_3 h_4} = 1,$$

wo die Koefficienten α_{ik} die Cosinus der Winkel zwischen je zwei Ebenen darstellen. Für uneigentliche Ebenen kann die linke Seite dieser Gleichung verschwinden; sie stellt alsdann eine Fläche zweiter Klasse dar. Die Determinante dieser Gleichung wird null, während die drei Unterdeterminanten positiv sind, welche man erhält, indem man erst überall die Marke 4, dann die Marken 3, 4 und endlich die Marken 2, 3, 4 wegläfst. Somit stellt das Verschwinden jener Form nach Üb. 9) l) zu § 18 (S. 140) einen imaginären eigentlichen Kegelschnitt dar. Die Gleichung dieses Kegelschnittes kann auf die Form gebracht werden:

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 0;$$

seine singuläre Ebene ist die unendlichferne Ebene.

4) Indem man in der Übung 12) zu § 24 annimmt, dafs die eine Fläche eine Kugel sei, erhält man beachtenswerte Resultate.

a) Wenn beide Flächen Kugeln sind und der Koefficient von ω^2 in der genannten Gleichung verschwindet, gelangt man zu dem Satze:

Wenn von zwei Kugeln die eine die sämtlichen Kanten eines Polartetraeders der andern Kugel berührt, so ist die Summe der Quadrate ihrer Radien gleich zwei Drittel des Quadrates ihrer Centraldistanz.

b) Wenn umgekehrt die Radien zweier Kugeln in der unter a) angegebenen Beziehung zum Abstande der Mittelpunkte stehen, so sollen für jede der beiden Kugeln diejenigen Polartetraeder gefunden werden, deren Kanten von der andern berührt werden.

c) In rechtwinkligen Koordinaten setze man die Gleichung der einen Fläche in der Form voraus:

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} + \frac{z^2}{\gamma} = 1;$$

dann folgt der Satz:

Der Mittelpunkt einer Fläche zweiter Ordnung hat für jede Kugel, welche einem ihrer Polartetraeder umgeschrieben ist, die Potenz $\alpha + \beta + \gamma$. Sobald er auf einer einzigen solchen Kugel liegt, gehen alle einem Polartetraeder umgeschriebenen Kugeln durch ihn hindurch. Liegt der Mittelpunkt der Fläche aufserhalb einer einzigen derartigen Kugel, so haben die von ihm an die sämtlichen einem Polartetraeder umgeschriebenen Kugeln gezogenen Tangenten dieselbe Länge.

5) a) Um zu einer gegebenen Fläche die Parallelfläche zu finden, errichtet man in jedem Punkte der Fläche die Normale (d. h. die Senkrechte auf der Tangentialebene) und schneidet auf jeder vom Berührungspunkte aus in derselben Richtung eine gleiche Strecke ab. Die Parallelfläche bildet hiernach den Ort der Mittelpunkte aller Kugeln von konstantem Radius, welche die gegebene Fläche berühren. Entsprechende Tangentialebenen der gegebenen Fläche und ihrer Parallelfläche haben stets denselben Abstand. Nun haben parallele Ebenen die Koordinaten u_1, u_2, u_3, die Richtungscosinus ihrer Senkrechten, gemein, während die Gröfsen u_4 sich um eine konstante Gröfse, den Abstand der Ebenen, unterscheiden. Demnach hat man, um die Parallelfläche zu einer Fläche, welche unter Anwendung von Hesseschen Ebenenkoordinaten u_1, u_2, u_3, u_4 durch die Gleichung $F(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0$ gegeben ist, durch dieselben Koordinaten darzustellen, in der gegebenen Gleichung u_4 durch $u_4 + \varepsilon$ zu ersetzen. Hiernach erscheint die Gleichung der Parallelfläche in der Form:

$$F(u_1, u_2, u_3, u_4 + \varepsilon) = 0.$$

Für manche Untersuchungen kann es angebracht sein, diese Form zu Grunde zu legen; im allgemeinen wird man aber auch diese Gleichung homogen machen, indem man die Gleichung in der Form schreibt:

$$F(u_1, u_2, u_3, u_4 + \varepsilon \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}) = 0.$$

b) Wenn eine Fläche von der m^{ten} Klasse ist, so ist ihre Parallelfläche im allgemeinen von der Klasse $2m$.

c) Die beiden Flächen, welche man dadurch erhält, dafs man dieselbe Strecke auf der Normale nach verschiedenen Seiten abträgt, sind im allgemeinen analytisch nur Teile derselben Fläche.

d) Alle Parallelflächen zu derselben Fläche haben die vom unendlichfernen Kreise ausgehenden Tangentialebenen gemeinschaftlich.

(Setzt man $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0$, so wird die Gleichung einer jeden Parallelfläche gleich dem Quadrat der gegebenen.)

e) Die Parallelfläche zum Ellipsoid

$$a^2u_1^2 + b^2u_2^2 + c^2u_3^2 = u_4^2$$

hat die Gleichung:

$$\{(a^2 - \varepsilon^2)u_1^2 + (b^2 - \varepsilon^2)u_2^2 + (c^2 - \varepsilon^2)u_3^2 - u_4^2\}^2 = 4\varepsilon^2u_4^2(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2).$$

f) Die Gleichung der Parallelfläche zum elliptischen Paraboloid

$$a^2u_1^2 + b^2u_2^2 = 2cu_3u_4$$

ist:

$$(a^2u_1^2 + b^2u_2^2 - 2cu_3u_4)^2 = 4c^2\varepsilon^2u_3^2(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2).$$

g) Bei den vorangehenden Entwicklungen haben wir nur die Tangentialebenen und nicht die Punkte der Fläche benutzt; daher gelten sie auch, wenn die Fläche durch eine Kurve ersetzt wird. Wir erhalten in diesem Falle die sämtlichen Tangentialebenen der gesuchten Fläche, indem wir zu sämtlichen Ebenen, welche durch eine Tangente der Kurve hindurchgehen, in dem vorgeschriebenen Abstande die parallele Ebene konstruieren. Die neue Fläche geht hierbei in eine Kanalfläche über. Um diese zu erzeugen, läfst man den Mittelpunkt einer Kugel mit gegebenem Radius sich auf der gegebenen Kurve bewegen; diejenige Fläche, von der alle diese Kugeln berührt werden, ist die gesuchte. Für den Fall, dafs der Mittelpunkt sich auf einer Ellipse bewegt, hat man in e) nur $c = 0$ zu setzen.

§ 29.

Das Hauptaxenproblem für die Flächen zweiter Ordnung.

1. In § 19 haben wir bereits die sämtlichen Arten von Flächen zweiter Ordnung charakterisiert und für jede einzelne Art in Cartesischen Koordinaten eine ihr eigentümliche Gleichungsform angegeben. Diese Form blieb aber bei gewissen Änderungen des Koordinatensystems ungeändert. So war beim Ellipsoid der Anfangspunkt bestimmt; die Axen unterlagen aber keiner andern Beschränkung, als dafs sie ein Tripel konjugierter Durchmesser bilden mufsten. Bei einem Paraboloid konnte man den Anfangspunkt noch beliebig auf der Fläche wählen; dann war eine Axe vollständig bestimmt, eine zweite konnte aber noch willkürlich in einem Strahlenbüschel angenommen werden. Wir konnten aber auf dem dort angegebenen Wege nicht unmittelbar ersehen, ob sich unter den hiernach gestatteten Koordinatensystemen ein rechtwinkliges befindet. Bei der hohen Bedeutung, welche die rechtwinkligen Koordinaten für die Metrik besitzen, gewährt es hohes Interesse, zu wissen, ob die charakteristische Form auch

für ein rechtwinkliges System erhalten werden kann. Aus diesem Grunde wenden wir uns demselben Probleme nochmals zu.

Wir nehmen an, es sei eine beliebige Gleichung zweiten Grades in rechtwinkligen Koordinaten x, y, z

$$(1)\quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy + 2Gx + 2Hy + 2Iz + K = 0$$

vorgelegt und man solle ein neues rechtwinkliges Koordinatensystem X, Y, Z so bestimmen, daſs in den neuen Koordinaten die Gleichung eine der oben (§ 19) angegebenen charakteristischen Formen erhält.

2. Der Übergang von der allgemeinen Form (1) auf die specielle Form erfordert mehrere Schritte. Diese kann man selbstverständlich in verschiedener Anordnung auf einander folgen lassen. Aber nur diejenige Anordnung darf als naturgemäſs angesehen werden, welche eine gleichmäſsige Behandlung aller Flächen gestattet. Die in § 19 mitgeteilten Formen stimmen aber bei ihrer sonstigen Verschiedenheit darin überein, daſs die Produkte xy, xz, yz nicht vorkommen. Daher werden wir als ersten Schritt zur Lösung des Problems die Aufgabe hinstellen, unter Beibehaltung des Anfangspunktes drei auf einander senkrecht stehende Axen so zu wählen, daſs für das neue System jene Produkte den Koefficienten null erhalten. Die beiden rechtwinkligen Systeme (x, y, z) und (ξ, η, ζ) sollen also denselben Anfangspunkt haben; dagegen soll bei dem Übergange von dem ersten zum zweiten System die Gleichung (1) die Form annehmen:

$$(2)\quad A\xi^2 + B\eta^2 + \Gamma\zeta^2 + 2K\xi + 2\Lambda\eta + 2M\zeta + N = 0.$$

Nachdem diese Aufgabe gelöst ist, geht man zu einem neuen Koordinatensystem X, Y, Z über, welches zu dem der ξ, η, ζ parallel ist. Man setzt also:

$$(3)\quad \xi = X + a,\ \eta = Y + b,\ \zeta = Z + c.$$

Dadurch bleibt die Form (2) in ihrem quadratischen Teile ungeändert; nur die Koefficienten K, Λ, M, N nehmen andere Werte an. Die Form (2) geht in die neue Form über:

$$(4)\quad AX^2 + BY^2 + \Gamma Z^2 + 2K'X + 2\Lambda'Y + 2M'Z + N' = 0.$$

Der Anfangspunkt des Koordinatensystems (X, Y, Z), oder mit andern Worten die Konstanten a, b, c in den Gleichungen (3) sind so zu wählen, daſs die vier Koefficienten K', Λ', M', N' möglichst einfache Werte erhalten. Diese zweite Aufgabe bietet

keine Schwierigkeit, nachdem die erste gelöst ist; es handelt sich also im wesentlichen nur um die Lösung der ersteren.

Diejenigen rechtwinkligen Koordinaten, bei deren Anwendung die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung in der einfachsten Form erscheint, nennen wir die Hauptaxen der Fläche. Als wesentlichsten Bestandteil des Problems, die Hauptaxen einer solchen Fläche zu suchen, dürfen wir daher die Aufgabe hinstellen:

A) Nachdem die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung in rechtwinkligen Koordinaten x, y, z gegeben ist, soll unter Beibehaltung des Anfangspunktes ein neues rechtwinkliges Koordinatensystem so bestimmt werden, dafs die Gleichung der Fläche bei Benutzung des neuen Systems die Glieder mit xy, xz und yz nicht mehr enthält.

3. Wir wollen das Problem noch in einigen andern Formen aufstellen. Die Werte, welche A, B, Γ in der Gleichung (2) annehmen, hangen von den Koefficienten G, H, I, K in der Gleichung (1) nicht ab. Ebenso bleiben die quadratischen Glieder in der Gleichung eines Kreises ungeändert, wenn man irgend ein anderes rechtwinkliges Koordinatensystem benutzt. Demnach dürfen wir in der Gleichung der Fläche (1) und in der einer beliebigen Kugel nur die quadratischen Glieder in Betracht ziehen und diese durch homogene lineare Ausdrücke umgestalten. Wir können somit das Problem A) durch das folgende ersetzen:

B) Die beiden quadratischen Formen

$$\Phi = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Exz + 2Fzy$$
$$\Psi = x^2 + y^2 + z^2$$

durch homogene lineare Gleichungen so umzugestalten, dafs die zweite Form ungeändert bleibt und die erste nur die Quadrate der Veränderlichen enthält.

4. Die Gleichung (1) dürfen wir, um sie homogen zu machen, auch in der Form schreiben:

$$Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 + 2Dx_2x_3 + 2Ex_1x_3 + 2Fx_1x_2 + 2Gx_1x_4 + 2Hx_2x_4 + 2Ix_3x_4 + Kx_4^2 = 0.$$

Hieraus ersehen wir, dafs die unendlichferne Kurve der Fläche die Gleichung hat:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Exz + 2Fxy = 0.$$

Ebenso wird eine beliebige Kugel von der unendlichfernen Ebene in der Kurve geschnitten:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Nach B) kommt es darauf hinaus, diese beiden Kurven durch dieselben drei Quadrate darzustellen. Wir wissen aber, dafs eine Kurve zweiter Ordnung durch blofse Quadrate dargestellt wird, wenn ein Polardreieck der Koordinatenbestimmung zu Grunde gelegt wird. Die Axen desjenigen Koordinatensystems, welches unserer Forderung genügt, müssen also die unendlichferne Ebene in den drei Eckpunkten eines den beiden Kurven gemeinsamen Polardreiecks schneiden. Hiernach darf das aufgestellte Problem durch das folgende ersetzt werden:

C) Man soll für die unendlichferne Kurve der gegebenen Fläche und den imaginären Kugelkreis ein gemeinsames Polardreieck bestimmen.

5. Wenn die gegebene Fläche Mittelpunktsfläche ist und ihre Gleichung die Produkte xy, xz, yz nicht enthält, so sind die Axen des Koordinatensystems einem Tripel konjugierter Durchmesser parallel. Für eine Kugel bilden irgend drei auf einander senkrecht stehende Durchmesser ein Tripel konjugierter Durchmesser. Demnach kommt das aufgestellte Problem für Mittelpunktsflächen auf das folgende hinaus:

D) Man suche drei konjugierte Durchmesser der gegebenen Fläche, welche je zu drei konjugierten Durchmessern einer Kugel parallel sind.

Da dies Problem nicht allgemein genug ist, werden wir im folgenden auf dasselbe nicht näher eingehen.

6. Wenn in der Gleichung der Fläche eine Variabele nur im Quadrate vorkommt, aber in der ersten Potenz weder für sich allein noch im Produkte mit andern Variabeln auftritt, so liegt die Fläche gegen die entsprechende Ebene symmetrisch. So sei in der Gleichung (1) $E = F = G = 0$; dann erhalten wir für beliebige Werte von y und z zwei entgegengesetzt gleiche Werte für x; jede auf der Ebene $x = 0$ errichtete Senkrechte schneidet daher die Fläche in zwei Punkten, welche von dieser Ebene gleich weit abstehen. Hiernach liegt es nahe, das Problem aufzustellen:

E) Man suche eine Ebene, gegen welche die gegebene Fläche symmetrisch liegt.

Im allgemeinen giebt es, wie wir sehen werden, drei Ebenen, welche der aufgestellten Forderung genügen und auf einander senkrecht stehen. Dann bedarf es keiner weiteren Operation, um die Normalform zu erhalten. Aus diesem Grunde werden wir im folgenden auch auf dieses Problem eingehen, obwohl es nicht direkt auf alle Flächen anwendbar ist.

Erste Lösung des Problems C):

7. Wir halten es aus mehreren Gründen für angebracht, die Lösung des Problems C) denen der beiden ersten Probleme voranzuschicken. Wir nehmen also an, in der unendlichfernen Ebene seien die beiden Kurven gegeben:

$$(4)\quad a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0,$$

$$(5)\quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

Ein Punkt $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ dieser Ebene hat in Bezug auf die erste Kurve die Polare:

$$x_1(a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + a_{13}\lambda_3) + x_2(a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + a_{23}\lambda_3) + x_3(a_{31}\lambda_1 + a_{32}\lambda_2 + a_{33}\lambda_3) = 0,$$

während seine Polare in Bezug auf die zweite Kurve die Gleichung hat:

$$\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \lambda_3x_3 = 0.$$

Damit diese beiden Gleichungen dieselbe gerade Linie darstellen, dürfen sie sich nur durch einen gewissen Faktor ω unterscheiden; es müssen daher die Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + a_{13}\lambda_3 &= \omega\lambda_1 \\ a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + a_{23}\lambda_3 &= \omega\lambda_2 \\ a_{31}\lambda_1 + a_{32}\lambda_2 + a_{33}\lambda_3 &= \omega\lambda_3 \end{aligned}$$

oder

$$(6)\quad \begin{aligned} (a_{11} - \omega)\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + a_{13}\lambda_3 &= 0 \\ a_{21}\lambda_1 + (a_{22} - \omega)\lambda_2 + a_{23}\lambda_3 &= 0 \\ a_{31}\lambda_1 + a_{32}\lambda_2 + (a_{33} - \omega)\lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

Demnach ist ω eine Wurzel der Gleichung.

$$(7)\quad \begin{vmatrix} a_{11} - \omega & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \omega & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \omega \end{vmatrix} = 0.$$

Umgekehrt gehört zu jeder Wurzel dieser Gleichung ein System von Gröfsen λ_1, λ_2, λ_3. Unsere Aufgabe mufs daher sein, die Gleichung (7) näher zu untersuchen.

8. Zunächst weisen wir nach, dafs die Gleichung (7) nur reelle Wurzeln hat; wir wollen dabei eine Methode anwenden, welche Weierstrafs für ein allgemeineres Problem angegeben hat. Nachdem eine Wurzel der Gleichung (7) gefunden ist, können wir leicht ein System von Gröfsen λ_1, λ_2, λ_3 bestimmen, welches den Gleichungen (6) genügt. Wenn eine Wurzel komplex ist: $\omega = k + li$, so lassen wir es zweifelhaft, ob die zugehörigen Werte von λ_1, λ_2, λ_3 reell oder imaginär sind; wir setzen demnach

$$\lambda_1 = \xi_1 + \eta_1 i,\ \lambda_2 = \xi_2 + \eta_2 i,\ \lambda_3 = \xi_3 + \eta_3 i,$$

und machen nur die Voraussetzung, dafs die Gröfsen ξ_1, ξ_2, ξ_3, η_1, η_2, η_3 reell sind und dafs mindestens eine unter ihnen von null verschieden ist.

Hiernach nimmt die erste Gleichung (6) die Gestalt an:

$$a_{11}(\xi_1 + \eta_1 i) + a_{12}(\xi_2 + \eta_2 i) + a_{13}(\xi_3 + \eta_3 i) = (k + li)(\xi_1 + \eta_1 i).$$

Die beiden andern Gleichungen (6) werden eine ähnliche Form erhalten. In diesen Gleichungen müssen die reellen und die imaginären Bestandteile auf beiden Seiten je einander gleich sein. Daher müssen die Gleichungen befriedigt werden:

$$\begin{aligned}
a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3 &= k\xi_1 - l\eta_1\\
a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + a_{23}\xi_3 &= k\xi_2 - l\eta_2\\
a_{31}\xi_1 + a_{32}\xi_2 + a_{33}\xi_3 &= k\xi_3 - l\eta_3\\
a_{11}\eta_1 + a_{12}\eta_2 + a_{13}\eta_3 &= k\eta_1 + l\xi_1\\
a_{21}\eta_1 + a_{22}\eta_2 + a_{23}\eta_3 &= k\eta_2 + l\xi_2\\
a_{31}\eta_1 + a_{32}\eta_2 + a_{33}\eta_3 &= k\eta_3 + l\xi_3.
\end{aligned}$$

Indem wir die drei ersten Gleichungen der Reihe nach mit η_1, η_2, η_3 multiplizieren, erhalten wir durch Addition die Beziehung:

$$\Sigma a_{\iota\varkappa}\eta_\iota\xi_\varkappa = k(\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3) - l(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2).$$

In ähnlicher Weise leiten wir aus den drei letzten Gleichungen die Relation her:

$$\Sigma a_{\iota\varkappa}\xi_\iota\eta_\varkappa = k(\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3) + l(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2).$$

Nun ist $\Sigma a_{\iota\varkappa}\xi_\iota\eta_\varkappa = \Sigma a_{\iota\varkappa}\eta_\iota\xi_\varkappa$; daher folgt durch Subtraktion der beiden letzten Gleichungen:

$$l(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2) = 0.$$

Da die sechs Gröfsen ξ_1, ξ_2, ξ_3, η_1, η_2, η_3 nicht sämtlich gleich null sein können, mufs $l = 0$ sein, oder jede Wurzel der Gleichung (7) ist reell.

9. Wir suchen jetzt die Werte von λ_1, λ_2, λ_3, welche zu einer Wurzel ω gehören. Zu dem Ende bezeichnen wir den Koefficienten von $a_{11} - \omega$ in der linken Seite von (7), die wir gleich Δ setzen wollen, durch Δ_{11}; nennen ebenso Δ_{12} den Koefficienten von a_{12} in dieser Determinante, und Δ_{13} den von a_{13} u. s. w.

Wenn die Unterdeterminanten nicht sämtlich verschwinden, so müssen die Gleichungen bestehen:

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = \Delta_{11} : \Delta_{12} : \Delta_{13}$$
$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = \Delta_{21} : \Delta_{22} : \Delta_{23}$$
$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = \Delta_{31} : \Delta_{32} : \Delta_{33}.$$

Diese Gleichungen ersetzen wir durch die folgende:

$$\lambda_1^2 : \lambda_1\lambda_2 : \lambda_1\lambda_3 = \Delta_{11} : \Delta_{12} : \Delta_{13}$$
$$\lambda_2\lambda_1 : \lambda_2^2 : \lambda_2\lambda_3 = \Delta_{21} : \Delta_{22} : \Delta_{23}$$
$$\lambda_3\lambda_1 : \lambda_3\lambda_2 : \lambda_3^2 = \Delta_{31} : \Delta_{32} : \Delta_{33}.$$

Nachdem wir etwa gesetzt haben: $\lambda_1^2 = \mu\Delta_{11}$, folgt zunächst: $\lambda_1\lambda_2 = \mu\Delta_{12}$, $\lambda_1\lambda_3 = \mu\Delta_{13}$. Nun ist allgemein $a_{\iota\varkappa} = a_{\varkappa\iota}$; es mufs also auch $\Delta_{\iota\varkappa} = \Delta_{\varkappa\iota}$ sein für alle Marken ι, $\varkappa$. Demnach ergiebt sich aus den Proportionen der zweiten und der dritten Reihe, dafs auch ist: $\lambda_2^2 = \mu\Delta_{22}$, $\lambda_2\lambda_3 = \mu\Delta_{23}$, $\lambda_3^2 = \mu\Delta_{33}$.

Diese Gleichungen

$$(8)\quad \lambda_1^2 = \mu\Delta_{11},\ \lambda_2^2 = \mu\Delta_{22},\ \lambda_3^2 = \mu\Delta_{33},$$
$$\lambda_2\lambda_3 = \mu\Delta_{23},\ \lambda_3\lambda_1 = \mu\Delta_{31},\ \lambda_1\lambda_2 = \mu\Delta_{12}$$

stellen die Koordinaten des unendlichfernen Punktes $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, 0)$ in symmetrischer Weise vermittelst der Unterdeterminanten der Determinante (7) dar.

10. Jetzt seien ω_1 und ω_2 zwei verschiedene Wurzeln der Gleichung (7); zu ω_1 möge nach den Gleichungen (8) das Wertsystem λ_1, λ_2, λ_3 und zu ω_2 das Wertsystem μ_1, μ_2, μ_3 gehören. Es mögen somit die Gleichungen bestehen:

$$a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + a_{13}\lambda_3 = \omega_1\lambda_1$$
$$a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + a_{23}\lambda_3 = \omega_1\lambda_2$$
$$a_{31}\lambda_1 + a_{32}\lambda_2 + a_{33}\lambda_3 = \omega_1\lambda_3$$

und

$$a_{11}\mu_1 + a_{12}\mu_2 + a_{13}\mu_3 = \omega_2\mu_1$$
$$a_{21}\mu_1 + a_{22}\mu_2 + a_{23}\mu_3 = \omega_2\mu_2$$
$$a_{31}\mu_1 + a_{32}\mu_2 + a_{33}\mu_3 = \omega_2\mu_3.$$

Wie in 8. multiplizieren wir die drei ersten Gleichungen mit μ_1, μ_2, μ_3 und die drei letzten mit λ_1, λ_2, λ_3 und leiten daraus die Relation her:

$$\Sigma a_{\iota\varkappa}\mu_\iota\lambda_\varkappa = \omega_1(\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3)$$
$$\Sigma a_{\iota\varkappa}\lambda_\iota\mu_\varkappa = \omega_2(\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3).$$

Da in diesen Gleichungen die linken Seiten einander gleich sind, die rechten Seiten sich aber um den ungleichen Faktor ω_1, ω_2 unterscheiden, so muſs sein:

$$(9)\quad \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3 = 0$$

und ferner:

$$(10)\quad \Sigma a_{\iota\varkappa}\lambda_\iota\mu_\varkappa = 0.$$

Die Punkte $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ und (μ_1, μ_2, μ_3) sind also konjugierte Pole in Bezug auf die beiden unendlichfernen Kegelschnitte. Wenn also die Gleichung (7) drei verschiedene Wurzeln hat, so sind die drei Punkte, welche je dieselbe Polare für die beiden Kegelschnitte haben, die Eckpunkte eines gemeinsamen Polardreiecks.

11. Aus der Gleichung (9) können wir mit Cauchy einen zweiten Beweis dafür herleiten, daſs die Gleichung (7) keine imaginäre Wurzel besitzt. Es sei nämlich $\omega = k + li$ eine Wurzel der Gleichung (7), und es seien $\lambda_1 = \xi_1 + \eta_1 i$, $\lambda_2 = \xi_2 + \eta_2 i$, $\lambda_3 = \xi_3 + \eta_3 i$ drei Gröſsen, welche im Verein mit $\omega = k + li$ die Gleichungen (6) befriedigen. Nun muſs die Gleichung (7) auſser $k + li$ noch eine Wurzel $k - li$ haben, und die Gleichungen (6) werden befriedigt, wenn man überall $+ i$ durch $- i$ ersetzt. Zu der Wurzel $k - li$ gehören also die Werte:

$$\mu_1 = \xi_1 - \eta_1 i,\ \mu_2 = \xi_2 - \eta_2 i,\ \mu_3 = \xi_3 - \eta_3 i.$$

Nun ist $\lambda_1\mu_1 = \xi_1^2 + \eta_1^2$ u. s. w.; die Gleichung (9) geht also über in die folgende:

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 + \xi_2^2 + \eta_2^2 + \xi_3^2 + \eta_3^2 = 0,$$

und diese kann nicht befriedigt werden, weil die sechs reellen Gröſsen $\xi_1 \ldots \eta_3$ nicht sämtlich gleich null sein können.

12. Wir gehen jetzt zu dem Falle über, daſs die Gleichung (7) gleiche Wurzeln hat.

Die Algebra lehrt, daſs für eine Doppelwurzel der Gleichung $\Delta(\omega) = 0$ auch die Ableitung verschwindet, daſs also mit $\Delta(\omega)=0$ auch $\frac{d\Delta(\omega)}{d\omega} = 0$ sein muſs. In unserm Falle muſs also eine Doppelwurzel auch der Gleichung genügen:

$$\Delta_{11} + \Delta_{22} + \Delta_{33} = 0.$$

Nun gelten aber für eine Doppelwurzel auch die Gleichungen (8), falls nicht alle Unterdeterminanten verschwinden; daher ist speciell:

$$\lambda_1^2 = \mu\Delta_{11},\ \lambda_2^2 = \mu\Delta_{22},\ \lambda_3^2 = \mu\Delta_{33};$$

es muſs somit sein:

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \mu(\Delta_{11} + \Delta_{22} + \Delta_{33}) = 0.$$

Da dies nicht angeht, so müssen für eine Doppelwurzel alle Unterdeterminanten verschwinden. Hiernach besteht der Satz:

Wenn die Gleichung (7) zwei gleiche Wurzeln hat, so müssen für diese auch alle Unterdeterminanten verschwinden, die man aus der auf der linken Seite stehenden Determinante durch Weglassung einer Zeile und einer Kolonne erhält.

13. Um die Beziehungen kennen zu lernen, welche zwischen den Koefficienten a_{ik} bestehen müssen, wofern die Gleichung (7) gleiche Wurzeln hat, bilden wir die drei Unterdeterminanten Δ_{12}, Δ_{13} und Δ_{23}. Da diese für eine Doppelwurzel verschwinden müssen, erhalten wir die Gleichungen:

$$(11)\quad (a_{11} - \omega)\,a_{23} = a_{12}a_{13},\ (a_{22} - \omega)\,a_{31} = a_{21}a_{23},$$
$$(a_{33} - \omega)\,a_{12} = a_{31}a_{32}.$$

Wenn hier a_{23}, a_{31} und a_{12} von null verschieden sind, können wir die Gleichungen in folgender Form schreiben:

$$(12)\quad \omega = a_{11} - \frac{a_{12}a_{13}}{a_{23}} = a_{22} - \frac{a_{21}a_{23}}{a_{31}} = a_{33} - \frac{a_{31}a_{32}}{a_{12}}.$$

Hierdurch sind uns die Bedingungen für die Existenz einer Doppelwurzel und der Wert derselben gegeben. Sobald diese Gleichungen befriedigt werden, verschwinden auch die Unterdeterminanten Δ_{11}, Δ_{22}, Δ_{33}.

Wenn einer der drei Koefficienten a_{23}, a_{31}, a_{12} null ist, muſs, wie die Gleichungen (11) zeigen, mindestens noch ein zweiter von ihnen verschwinden. Angenommen, es wäre $a_{13} = a_{23} = 0$,

$a_{12} \neq 0$. Dann folgt aus (11), daſs $\omega = a_{33}$ ist. Die Gleichung $\Delta_{33} = 0$ fügt die Bedingung hinzu:

$$(a_{11} - a_{33})(a_{22} - a_{33}) = a_{12}^2.$$

Wenn endlich $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$ ist, so lautet die Bedingung für die Existenz einer Doppelwurzel:

$$(a_{11} - a_{22})(a_{22} - a_{33})(a_{33} - a_{11}) = 0.$$

14. Da für eine Doppelwurzel alle Unterdeterminanten von Δ verschwinden, so kommen in diesem Falle die drei Gleichungen (6) auf eine einzige hinaus. Somit hat jeder Punkt einer gewissen geraden Linie für beide Kegelschnitte dieselbe Polare. Das gilt speciell für die Schnittpunkte dieser Geraden mit dem imaginären Kugelkreise; die unendlichfernen Linien der beiden Flächen berühren einander in zwei Punkten. Wenn umgekehrt diese beiden Kurven einander doppelt berühren, so werden alle Punkte der Verbindungslinie der Berührungspunkte durch diese Punkte einander harmonisch zugeordnet; zugleich ist der Schnittpunkt der gemeinsamen Tangenten Pol der Geraden für beide Kurven. Demnach haben die Kurven in diesem Falle unendlichviele Polardreiecke gemeinsam; alle diese Dreiecke haben einen Eckpunkt gemeinschaftlich und die gegenüberliegende Seite gehört einer bestimmten geraden Linie an. Die beiden Kurven bestimmen einen Büschel von derjenigen Art, die in I § 25 (I S. 166) untersucht worden ist.

Wenn die Gleichung (7) zwei gleiche Wurzeln hat, so haben die beiden unendlichfernen Kurven unendlich viele Polardreiecke gemeinschaftlich.

15. Wir untersuchen jetzt den Fall, daſs die Gleichung (7) eine dreifache Wurzel hat. Da die Summe der drei Wurzeln von (7) gleich $a_{11} + a_{22} + a_{33}$ ist, können diese nur gleich sein, wenn $\omega = \frac{a_{11} + a_{22} + a_{33}}{3}$ ist. Jetzt müssen aber auch die Gleichungen (11) bestehen. Wofern also keiner der drei Koefficienten a_{12}, a_{13}, a_{23} verschwindet, folgen aus (12) die Gleichungen:

$$\frac{a_{11} + a_{22} + a_{33}}{3} = a_{11} - \frac{a_{12}a_{13}}{a_{23}}$$

$$\frac{a_{11} + a_{22} + a_{33}}{3} = a_{22} - \frac{a_{21}a_{23}}{a_{31}}$$

$$\frac{a_{11}+a_{22}+a_{33}}{3} = a_{33} - \frac{a_{31}a_{32}}{a_{12}}.$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen ergiebt sich aber die Relation:

$$a_{13}^2 a_{13}^2 + a_{21}^2 a_{23}^2 + a_{31}^2 a_{32}^2 = 0,$$

welche für reelle von null verschiedene Werte nicht befriedigt werden kann.

Wenn aber $a_{23} = a_{13} = 0$, $a_{12} \neq 0$ ist, so leitet man aus den Gleichungen:

$$a_{33} = \frac{a_{11}+a_{22}+a_{33}}{3},\quad a_{12}^2 = (a_{11} - a_{33})(a_{22} - a_{33})$$

die Beziehung her:

$$(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 = 0,$$

welche ebenfalls mit unserer Annahme unvereinbar ist. Es mufs also sein:

$$a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0,\quad a_{11} = a_{22} = a_{33},$$

oder die gegebene Fläche ist ebenfalls eine Kugel.

Hiernach hat die Gleichung $\Delta(\omega) = 0$ entweder drei ungleiche Wurzeln oder eine Doppelwurzel oder eine dreifache Wurzel. Im ersten Falle haben die unendlichfernen Kurven der gegebenen Flächen ein einziges gemeinsames Polardreieck; im zweiten Falle giebt es deren unendlich viele. Im dritten Falle, wo die beiden Flächen Kugeln sind und die Schnittlinien mit der unendlichfernen Ebene identisch werden, sind alle in dieser Ebene gelegenen Polardreiecke gemeinsam.

Zieht man vom Anfangspunkte des Koordinatensystems nach den drei Eckpunkten eines solchen Dreiecks gerade Linien und wählt diese zu Kanten eines Cartesischen Koordinatensystems, so ist dasselbe rechtwinklig; bei seiner Benutzung fallen die Produkte xy, xz und yz aus der Gleichung der Fläche fort.

Lösung des Problems B).

16. Das Problem B) stellen wir in folgender Form auf:

Es seien die beiden quadratischen Formen in drei Variabeln gegeben:

$$\Phi = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2$$

$$\Psi = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Man soll x_1, x_2, x_3 durch homogene lineare Funktionen von y_1, y_2, y_3:

$$(13)\quad \begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 y_1 + \mu_1 y_2 + \nu_1 y_3 \\ x_2 &= \lambda_2 y_1 + \mu_2 y_2 + \nu_2 y_3 \\ x_3 &= \lambda_3 y_1 + \mu_3 y_2 + \nu_3 y_3 \end{aligned}$$

ersetzen und die Koefficienten so wählen, daſs die zweite Form ungeändert bleibt und in der ersten die Koefficienten von y_1y_2, y_1y_3 und y_2y_3 wegfallen. Es soll also sein:

$$(14)\quad \begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \\ \Phi &= b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + b_2 y_3^2. \end{aligned}$$

Wir wollen dies Problem im Anschluſs an die soeben durchgeführten Entwicklungen zu lösen suchen.

Indem wir in die linke Seite von (14) die Werte (13) einsetzen, erhalten wir auf der linken Seite eine quadratische Form von y_1, y_2, y_3. Hier hat y_1^2 den Koefficienten $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$ und $2y_2y_3$ den Koefficienten $\mu_1\nu_1 + \mu_2\nu_2 + \mu_3\nu_3$. Nun soll die Gleichung (14) für alle Werte von y_1, y_2, y_3 erfüllt sein; also müssen alle Glieder auf beiden Seiten denselben Wert haben. Das giebt die Gleichungen:

$$(15)\quad \begin{aligned} \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 &= 1, & \mu_1\nu_1 + \mu_2\nu_2 + \mu_3\nu_3 &= 0, \\ \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 &= 1, & \nu_1\lambda_1 + \nu_2\lambda_2 + \nu_3\lambda_3 &= 0, \\ \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 &= 1, & \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3 &= 0. \end{aligned}$$

Wenn die Werte (13) in Φ eingesetzt werden, so wird der Koefficient von y_2y_3:

$$\begin{aligned} &a_{11}\mu_1\nu_1 + a_{22}\mu_2\nu_2 + a_{33}\mu_3\nu_3 + a_{12}(\mu_1\nu_2 + \mu_2\nu_1) \\ &\quad + a_{13}(\mu_1\nu_3 + \mu_3\nu_1) + a_{23}(\mu_2\nu_3 + \mu_3\nu_2). \end{aligned}$$

Da dieser Koefficient sowie der von y_3y_1 und der von y_1y_2 verschwinden soll, so müssen die Gleichungen bestehen:

$$(16)\quad \begin{aligned} &a_{11}\mu_1\nu_1 + a_{22}\mu_2\nu_2 + a_{33}\mu_3\nu_3 + a_{12}(\mu_1\nu_2 + \mu_2\nu_1) \\ &\quad + a_{13}(\mu_1\nu_3 + \mu_3\nu_1) + a_{23}(\mu_2\nu_3 + \mu_3\nu_2) = 0 \\ &a_{11}\nu_1\lambda_1 + a_{22}\nu_2\lambda_2 + a_{33}\nu_3\lambda_3 + a_{12}(\nu_1\lambda_2 + \nu_2\lambda_1) \\ &\quad + a_{13}(\nu_1\lambda_3 + \nu_3\lambda_1) + a_{23}(\nu_2\lambda_3 + \nu_3\lambda_2) = 0 \\ &a_{11}\lambda_1\mu_1 + a_{22}\lambda_2\mu_2 + a_{33}\lambda_3\mu_3 + a_{12}(\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1) \\ &\quad + a_{13}(\lambda_1\mu_3 + \lambda_3\mu_1) + a_{23}(\lambda_2\mu_3 + \lambda_3\mu_2) = 0. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (16) und die drei letzten Gleichungen (15) gestatten uns, λ_1, λ_2, λ_3 und μ_1, μ_2, μ_3 sowie ν_1, ν_2, ν_3 aufzufassen als die Koordinaten von drei Punkten, welche einander zu je zweien in Bezug auf die beiden Kurven $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$

und $\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa = 0$ als konjugierte Pole zugeordnet sind. Schon diese Bemerkung führt das Problem B) auf das soeben gelöste Problem C) zurück.

Wir können aber auch folgenden Weg einschlagen. Indem wir die Abkürzungen einführen:

$$\begin{aligned} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + a_{13}\lambda_3 &= l_1 \\ a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + a_{23}\lambda_3 &= l_2 \\ a_{31}\lambda_1 + a_{32}\lambda_2 + a_{33}\lambda_3 &= l_3, \end{aligned} \tag{17}$$

gehen die beiden letzten Gleichungen (16) über in

$$\begin{aligned} l_1\mu_1 + l_2\mu_2 + l_3\mu_3 &= 0 \\ l_1\nu_1 + l_2\nu_2 + l_3\nu_3 &= 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Beziehung:

$$l_1 : l_2 : l_3 = (\mu_2\nu_3 - \mu_3\nu_2) : (\mu_3\nu_1 - \mu_1\nu_3) : (\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1).$$

In gleicher Weise mufs aber auch wegen der beiden letzten Gleichungen (15) sein:

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = (\mu_2\nu_3 - \mu_3\nu_2) : (\mu_3\nu_1 - \mu_1\nu_3) : (\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1).$$

Demnach giebt es eine Gröfse ω, für welche ist:

$$l_1 = \omega\lambda_1,\ l_2 = \omega\lambda_2,\ l_3 = \omega\lambda_3.$$

Wenn wir aber für l_1, l_2, l_3 die Werte (17) einsetzen, gehen die letzten Gleichungen über in:

$$\begin{aligned} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + a_{13}\lambda_3 &= \omega\lambda_1 \\ a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + a_{23}\lambda_3 &= \omega\lambda_2 \\ a_{31}\lambda_1 + a_{32}\lambda_2 + a_{33}\lambda_3 &= \omega\lambda_3. \end{aligned}$$

Dies ist aber dasjenige System von Gleichungen, welches wir unter (6) zur Grundlage der vorigen Untersuchung gemacht haben. Wir dürfen also die vorige Entwicklung auch zur Lösung des Problems B) benutzen und gelangen wieder zu den vorhin gefundenen Resultaten.

Multiplizieren wir die letzten drei Gleichungen der Reihe nach mit λ_1, λ_2, λ_3 und addieren, so wird die rechte Seite wegen der ersten Gleichung (15) gleich ω_1. Die linke Seite wird aber jetzt gleich

$$\Sigma a_{\iota\varkappa}\lambda_\iota\lambda_\varkappa.$$

Das ist aber der Koefficient von y_1^2 in der Form Φ, nachdem wir darin für x_1, x_2, x_3 die Werte (13) eingesetzt haben; es mufs also $\omega_1 = b_1$ sein. Dieselbe Untersuchung läfst sich

aber für μ_1, μ_2, μ_3 und für ν_1, ν_2, ν_3 anstellen. Die Form Φ nimmt also bei der angegebenen Transformation die Gestalt an:

$$\Phi = \omega_1 y_1^2 + \omega_2 y_2^2 + \omega_3 y_3^2,$$

wo ω_1, ω_2, ω_3 die Wurzeln der Gleichung (7) sind.

Lösung des Problems A).

17. Es sei eine Gleichung in den vier Variabeln x_1, x_2, x_3, x_4 gegeben:

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4),$$

wo $x_4 = 0$ die unendlichferne Ebene ist und die Gröfsen x_1, x_2, x_3 ein rechtwinkliges Koordinatensystem bestimmen; man soll unter Beibehaltung des Anfangspunktes ein neues rechtwinkliges Koordinatensystem y_1, y_2, y_3 so bestimmen, dafs unter seiner Benutzung die Glieder mit y_1y_2, y_1y_3 und y_2y_3 in der Gleichung der Fläche verschwinden.

Da die Koordinaten x_1, x_2, x_3 und y_1, y_2, y_3 denselben Anfangspunkt haben, mufs der Übergang von dem einen zum andern System durch Gleichungen von der Form (13) vermittelt werden. Nun soll das zweite System ebenfalls rechtwinklig sein; somit müssen, wie die Theorie der Cartesischen Koordinaten lehrt, zwischen den neun Koefficienten der Gleichungen (13) die sechs Beziehungen (15) bestehen. Endlich zieht die Forderung, dafs die Koefficienten von y_2y_3, y_3y_1 und y_1y_2 gleich null sein sollen, die Gleichungen (16) nach sich. Wir werden also auf dieselben Gleichungen geführt, von denen wir soeben ausgegangen sind.

Lösung des Problems E).

18. Wir suchen eine Ebene, der gegenüber die Fläche symmetrisch liegt. Dabei ist es von Vorteil, die Koordinaten der Ebene von denen der Fläche zu unterscheiden. Dementsprechend wollen wir die rechtwinkligen Cartesischen Koordinaten für Punkte der Fläche durch x_1, x_2, x_3 und die auf dasselbe System bezogenen Koordinaten für Punkte der Ebene mit z_1, z_2, z_3 bezeichnen. Die Gleichung dieser Ebene in der Hesseschen Normalform sei:

$$(18) \quad \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 + e = 0,$$

wo zwischen den Gröfsen λ_1, λ_2, λ_3 die Relation besteht:

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1.$$

Hier sind λ_1, λ_2, λ_3 die Richtungscosinus der vom Anfangspunkte auf die Ebene gefällten Senkrechten. Dieselbe Richtung hat aber jede auf der Ebene errichtete Senkrechte. Demnach sind

$$z_1 + \lambda_1 p,\ z_2 + \lambda_2 p,\ z_3 + \lambda_3 p$$

die Koordinaten eines Punktes, welcher in der im Punkte z_1, z_2, z_3 auf der Ebene errichteten Senkrechten liegt und von ihr den Abstand p hat.

Nun soll die Fläche:

$$(19)\quad \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa + 2\Sigma b_\iota x_\iota + c = 0 \qquad \cdot (\iota, \varkappa = 1, 2, 3)$$

symmetrisch liegen gegen die Ebene (18). Daher soll jede auf der Ebene errichtete Senkrechte die Fläche in zwei Punkten schneiden, welche gleichweit von der Ebene entfernt sind. Setzt man also in (19)

$$x_1 = z_1 + \lambda_1 p,\ x_2 = z_2 + \lambda_2 p,\ x_3 = z_3 + \lambda_3 p,$$

so mufs die neue Gleichung zwei entgegengesetzt gleiche Werte für p liefern, oder in dieser Gleichung mufs der Koefficient von p verschwinden. Dies liefert die Beziehung:

$$(20)\quad \Sigma a_{\iota\varkappa} z_\iota \lambda_\varkappa + \Sigma b_\iota \lambda_\iota = 0.$$

Da diese Gleichung für alle Werte von z_1, z_2, z_3, welche Punkten der Ebene entsprechen, erfüllt sein mufs, so mufs sie dieselbe Ebene darstellen wie die Gleichung (18). Die beiden Gleichungen dürfen sich also nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden; es müssen die Bedingungen erfüllt sein:

$$(21)\quad \begin{cases} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + a_{13}\lambda_3 = \omega\lambda_1 \\ a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + a_{23}\lambda_3 = \omega\lambda_2 \\ a_{31}\lambda_1 + a_{32}\lambda_2 + a_{33}\lambda_3 = \omega\lambda_3. \end{cases}$$

$$(22)\quad b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + b_3\lambda_3 = \omega e.$$

Die drei Gleichungen (21) sind mit den Gleichungen (6) identisch; wir finden also mindestens ein System von drei auf einander senkrechten Ebenen, deren Richtungscosinus den Gleichungen (21) genügen. Auch läfst sich jedesmal, wenn eine Wurzel ω von null verschieden ist, die Gröfse e so bestimmen, dafs auch die Gleichung (22) befriedigt wird. Diese Methode hat also sehr grofse Vorzüge, wenn die drei Wurzeln der Gleichung (7) von null verschieden sind, mit andern Worten, wenn die gegebene Fläche nicht von der unendlich fernen Ebene berührt wird. Wenn aber die Gleichung (7) eine oder zwei ver-

schwindende Wurzeln hat, so läfst sie sich direkt nicht anwenden, sondern macht es notwendig, dafs man auf eines der andern Probleme zurückgeht.

Übungen:

1) Man führe die angegebenen Untersuchungen durch für die Flächen:

a) $5x^2 + 6y^2 + 7z^2 - 4xy - 4yz - 6 = 0.$

b) $5x^2 - y^2 + z^2 + 4xy + 6xz + 2x + 4y + 6z = 8.$

c) $10(x^2 + y^2 + z^2) - 8xz + 6yz - 28x - 26y - 34z + 43 = 0.$

2) a) Man lege der Untersuchung die Gleichung zu Grunde:

$$\alpha yz + \beta xz + \gamma xy = 1.$$

b) Diese Gleichung stellt ein ein- oder zweischaliges Hyperboloid dar, jenachdem das Produkt $\alpha\beta\gamma$ negativ oder positiv ist.

c) Speciell wähle man $\alpha = 1$, $\beta = -\gamma = 6$ oder $\alpha = 3$, $\beta = \gamma = \sqrt{2}$.

d) Man untersuche die Fläche:

$$yz + zx + xy - x - 2y - 3z = 0.$$

3) a) Wenn ein Flächenbüschel zweiter Ordnung zwei Kugeln enthält, so sind alle ihre Flächen Kugeln.

b) Wenn in einem Flächenbüschel zweiter Ordnung eine Kugel vorkommt, so haben ihre Flächen parallele Axen.

c) In diesem Falle kann man unter Anwendung rechtwinkliger Koordinaten die Gleichungen zu Grunde legen:

$$x^2 + y^2 + z^2 = m^2$$
$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + 2ax + 2by + 2cz = 1.$$

d) Ein solcher Büschel enthält drei Paraboloide, deren Axen senkrecht gegen einander geneigt sind und von denen eines hyperbolisch, zwei elliptisch sind.

e) In welchen Fällen treten Cylinder an die Stelle der Paraboloide?

f) Man bestimme die Kurve der Mittelpunkte für den in c) angegebenen Büschel.

g) Speciell setze man voraus, die beiden in c) angegebenen Flächen hätten denselben Mittelpunkt, und klassifiziere die Büschel, welche unter dieser Annahme noch möglich sind.

4) a) Zwei Flächen zweiter Ordnung seien auf dasselbe rechtwinklige Koordinatensystem bezogen; wann giebt es zu jedem

Tripel konjugierter Durchmesser der einen ein paralleles Tripel von konjugierten Durchmessern in der andern Fläche?

b) Welche Eigenschaft hat die Schnittkurve der beiden Flächen?

5) Zwei konzentrische Flächen zweiter Ordnung mögen gleichgerichtete Axen haben; wann haben sie kein weiteres Tripel konjugierter Durchmesser gemeinschaftlich? Welche Möglichkeiten giebt es unter dieser Annahme in Bezug auf gemeinsame Tripel konjugierter Durchmesser?

6) Als Axe einer Fläche zweiter Ordnung können wir eine gerade Linie definieren, gegen welche die Fläche symmetrisch liegt, d. h. welche jede sie senkrecht schneidende Gerade halbiert.

Diese Definition stimmt im wesentlichen mit der folgenden überein:

Axe einer Fläche zweiter Ordnung ist eine gerade Linie, welche auf den Polarebenen ihrer Punkte senkrecht steht.

Denn alle durch einen Punkt parallel zu seiner Polarebene gezogenen Sehnen werden in dem Punkte halbiert; wenn der Punkt in einer Geraden liegt, welche auf der Polarebene senkrecht steht, so schneiden jene Sehnen die Gerade unter rechten Winkeln.

Die Behandlung des Problems ist sehr einfach, wenn man die zweite Definition zu Grunde legt. Die Polarebene des Punktes $(\lambda_1 r + e_1,\ \lambda_2 r + e_2,\ \lambda_3 r + e_3,\ 1)$ für die Fläche (19) hat die Gleichung:

$$\Sigma a_{\iota\varkappa}(\lambda_\iota r + e_\iota)x_\iota + \Sigma b_\iota(\lambda_\iota + e_\iota + x_\iota) + c = 0.$$

Soll diese für jeden Wert von r auf der Axe senkrecht stehen, so müssen die Gleichungen erfüllt sein:

$$\Sigma a_{1\varkappa}\lambda_\varkappa = \omega\lambda_1,\quad \Sigma a_{2\varkappa}\lambda_\varkappa = \omega\lambda_2,\quad \Sigma a_{3\varkappa}\lambda_\varkappa = \omega\lambda_3,$$

$$\Sigma a_{1\varkappa}e_\varkappa + b_1 = \varrho\lambda_1,\quad \Sigma a_{2\varkappa}e_\varkappa + b_2 = \varrho\lambda_2,\quad \Sigma a_{3\varkappa}e_\varkappa + b_3 = \varrho\lambda_3.$$

Die drei ersten Gleichungen liefern die Werte von $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$; statt eine der drei Gröfsen e_1, e_2, e_3, wie es gestattet ist, willkürlich zu wählen, kann man auch ϱ unbestimmt lassen oder etwa gleich null setzen. Alsdann findet man, wofern die Determinante der $a_{\iota\varkappa}$ von null verschieden ist, die Werte für e_1, e_2, e_3.

Will man das Problem in seiner ersten Form direkt in Angriff nehmen, so kann man etwa in folgender Weise vorgehen: Sollen die Punkte (x_1, x_2, x_3) und (x_1', x_2', x_3') Gegenpunkte in Bezug auf die Axe $(\lambda_1 r + e_1, \lambda_2 r + e_2, \lambda_3 r + e_3)$ sein, so mufs

sein $x_\iota + x_\iota' = 2\lambda_\iota r + 2e_\iota$ für $r = \lambda_1 (x_1 - e_1) + \lambda_2 (x_2 - e_2) + \lambda_3 (x_3 - e_3)$. Setzt man diese Werte für x_1', x_2', x_3' in die Gleichung der Fläche über, so geht diese über in

$$4r^2 \Sigma a_{\iota\varkappa} \lambda_\iota \lambda_\varkappa + 4r \Sigma a_{\iota\varkappa} \lambda_\iota (2e_\varkappa - x_\varkappa) - 4 \Sigma a_{\iota\varkappa} e_\iota e_\varkappa - 4 \Sigma a_{\iota\varkappa} e_\iota x_\varkappa + \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa - 4r \Sigma b_\iota \lambda_\iota + 4 \Sigma b_\iota e_\iota - 2 \Sigma b_\iota x_\iota + c = 0.$$

Diese mufs mit der Gleichung der gegebenen Fläche übereinstimmen. Indem man zunächst die Koefficienten von x_1^2, $x_1 x_2$ u. s. w. vergleicht und $\Sigma a_{\iota\varkappa} \lambda_\iota \lambda_\varkappa = \varpi$ setzt, kommt man wieder zu den früheren Gleichungen für λ_1, λ_2, λ_3.

§ 30.

Zweite Lösung des Hauptaxenproblems.

1. Wir wollen das vorhin aufgestellte Problem B), von welchem die Probleme A) und C) nur der Form nach verschieden sind, noch in einer zweiten Weise erledigen. Es sollen also die Variabeln x_1, x_2, x_3 durch drei neue Variabelen ersetzt und diese als Funktionen der ersteren so gewählt werden, dafs die beiden Gleichungen identisch befriedigt werden:

$$(1) \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2.$$

$$(2) \quad a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 + 2a_{23} x_2 x_3 = \omega_1 y_1^2 + \omega_2 y_2^2 + \omega_3 y_3^2.$$

Indem wir die erste Gleichung mit ω_1 multiplizieren und von der zweiten subtrahieren, erhalten wir die Gleichung:

$$(3) \quad (a_{11} - \omega_1) x_1^2 + (a_{22} - \omega_1) x_2^2 + (a_{33} - \omega_1) x_3^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 + 2a_{23} x_2 x_3 = (\omega_2 - \omega_1) y_2^2 + (\omega_3 - \omega_1) y_3^2.$$

Hier enthält die rechte Seite nur zwei Variabele; da unserer Annahme nach die linke Seite der rechten identisch gleich ist, verschwindet die Determinante aus den Koefficienten der linken Seite. Setzen wir also

$$(4) \quad \Delta(\omega) = \begin{vmatrix} a_{11} - \omega & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \omega & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \omega \end{vmatrix},$$

so mufs $\Delta(\omega_1) = 0$ sein. Ebenso ergiebt sich $\Delta(\omega_2) = 0$, $\Delta(\omega_3) = 0$.

Wenn also die durch die Gleichungen (1) und (2) angegebene Umwandlung überhaupt möglich ist, so sind die neuen Koefficienten ω_1, ω_2, ω_3 die Wurzeln der Gleichung $\Delta(\omega) = 0$.

2. Wenn die drei Koefficienten a_{23}, a_{31}, a_{12} sämtlich von null verschieden sind, so darf man annehmen, daſs das Produkt $a_{23}a_{31}a_{12}$ positiv ist, weil man im andern Falle Φ mit $-\Phi$ vertauschen dürfte. Dann sind auch die Quotienten

$$\frac{a_{12}a_{13}}{a_{23}}, \quad \frac{a_{23}a_{21}}{a_{31}}, \quad \frac{a_{31}a_{32}}{a_{12}}$$

positive Gröſsen (der erste ist gleich $\frac{a_{23}a_{31}a_{12}}{a_{23}^2}$); wir dürfen daher setzen: $\frac{a_{12}a_{13}}{a_{23}} = m_1^2$, $\frac{a_{23}a_{21}}{a_{31}} = m_2^2$, $\frac{a_{31}a_{32}}{a_{12}} = m_3^2$.

Hierdurch sind die Gröſsen m_1, m_2, m_3 bis auf das Vorzeichen bestimmt. Nun ergeben sich aus den letzten Gleichungen die folgenden:

$$a_{23}^2 = m_2^2 m_3^2, \quad a_{31}^2 = m_3^2 m_1^2, \quad a_{12}^2 = m_1^2 m_2^2;$$

wir dürfen daher die Vorzeichen so wählen, daſs wird:

$$a_{23} = m_2 m_3, \quad a_{31} = m_3 m_1, \quad a_{12} = m_1 m_2.$$

Indem man noch setzt:

$$a_{11} - m_1^2 = e_1, \quad a_{22} - m_2^2 = e_2, \quad a_{33} - m_3^2 = e_3,$$

nimmt die Gleichung $\Delta(\omega) = 0$ die Gestalt an:

$$\begin{vmatrix} m_1^2 + e_1 - \omega & m_1 m_2 & m_1 m_3 \\ m_2 m_1 & m_2^2 + e_2 - \omega & m_2 m_3 \\ m_3 m_1 & m_3 m_2 & m_3^2 + e_3 - \omega \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$(5) \quad m_1^2(\omega - e_2)(\omega - e_3) + m_2^2(\omega - e_3)(\omega - e_1) + m_3^2(\omega - e_1)(\omega - e_2) - (\omega - e_1)(\omega - e_2)(\omega - e_3) = 0.$$

Diese Gleichung kann man auch in der eleganten Form schreiben

$$(6) \quad \frac{m_1^2}{\omega - e_1} + \frac{m_2^2}{\omega - e_2} + \frac{m_3^2}{\omega - e_3} = 1.$$

3. Die Form (5) liefert uns einen sehr einfachen Beweis für den Satz, daſs die Gleichung $\Delta(\omega) = 0$ drei reelle Wurzeln hat. Wir nehmen zunächst an, die Gröſsen e_1, e_2, e_3 seien ungleich und es sei $e_1 > e_2 > e_3$.

Für einen sehr groſsen Wert von ω nimmt die linke Seite von (5) einen negativen Wert an; dagegen wird sie für $\omega = e_1$

positiv, für $\omega = e_2$ negativ und für $\omega = e_3$ wieder positiv. Betrachten wir also die linke Seite der Gleichung (5) als eine Funktion von ω, so geht sie, während ω von einem sehr grofsen positiven Werte stetig bis e_3 abnimmt, stets von einem negativen zu einem positiven Werte, dann wieder zu einem negativen und endlich wieder zu einem positiven Werte über. Diese Funktion verschwindet also einmal für einen Wert ω_1, der gröfser ist als e_1, dann zum zweiten Male für einen Wert ω_2, der zwischen e_1 und e_2 liegt, und zum dritten Male für einen Wert ω_3 zwischen e_2 und e_3. Die obige von Jacobi angegebene Umgestaltung der Gleichung $\Delta(\omega) = 0$ zeigt uns also nicht nur, dafs die drei Wurzeln dieser Gleichung reell sind, sondern giebt uns auch Grenzen an, zwischen denen die einzelnen Wurzeln liegen.

4. Aus dieser Betrachtung geht unmittelbar hervor, dafs die Gleichung (5) nur dann eine zweifache Wurzel besitzen kann, wenn zwei der Gröfsen e_1, e_2, e_3 gleich sind. Nehmen wir etwa an, es sei $e_1 = e_2$; dann mufs auch $\omega_2 = e_1$ sein. In diesem Falle hat $\Delta(\omega)$ den Faktor $\omega - e_1$; nach Abtrennung desselben bleibt der Faktor übrig:

$$(\omega - e_3)(m_1^2 + m_2^2) + (m_3^2 - \omega + e_3)(\omega - e_1).$$

Dieser zweite Faktor mufs aber für $\omega = e_1$ verschwinden, falls die gegebene Gleichung eine Doppelwurzel gleich e_1 haben soll. Somit mufs sein

$$(e_1 - e_3)(m_1^2 + m_2^2) = 0,$$

oder es mufs auch $e_1 = e_3$ sein. Die Gleichung $\Delta(\omega) = 0$ kann also nur eine Doppelwurzel haben, wenn $e_1 = e_2 = e_3$ ist. In der That enthält in diesem Falle die linke Seite von (5) den Faktor $(\omega - e_1)^2$; die dritte Wurzel ergiebt sich aus der Gleichung:

$$\omega - e_1 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2;$$

diese ist stets gröfser als die Doppelwurzel.

Wenn die drei Koefficienten a_{23}, a_{31}, a_{12} von null verschieden sind, so kann die Gleichung $\Delta(\omega) = 0$ keine dreifache Wurzel besitzen; sie hat dann und nur dann eine Doppelwurzel, wenn $e_1 = e_2 = e_3$ ist, oder wenn die Bedingungen erfüllt sind:

$$(6)\quad a_{11} - \frac{a_{12}a_{13}}{a_{23}} = a_{22} - \frac{a_{23}a_{21}}{a_{31}} = a_{33} - \frac{a_{31}a_{32}}{a_{12}}.$$

5. Wir müssen jetzt die Gleichung $\Delta(\omega) = 0$ in dem Falle untersuchen, dafs die Koefficienten a_{23}, a_{31}, a_{12} teilweise null sind. Zunächst nehmen wir an, es sei $a_{23} = 0$, aber a_{12} und a_{13} seien von null verschieden. In diesem Falle geht die Gleichung $\Delta(\omega) = 0$ in die folgende über:

$$(7)\quad (a_{11}-\omega)(a_{22}-\omega)(a_{33}-\omega) - a_{12}^2(a_{33}-\omega) - a_{13}^2(a_{22}-\omega) = 0;$$

diese kann auch in der Form geschrieben werden:

$$(a_{11}-\omega) - \frac{a_{12}^2}{a_{22}-\omega} - \frac{a_{13}^2}{a_{33}-\omega} = 0.$$

Wenn a_{22} und a_{33} ungleich sind, wollen wir annehmen, es sei $a_{22} > a_{33}$. Dann wird für sehr grofse Werte von ω die Funktion $\Delta(\omega)$ negativ, für $\omega = a_{22}$ positiv, für $\omega = a_{33}$ negativ und für sehr grofse negative Werte wieder positiv. Die Gleichung hat also wieder drei reelle Wurzeln, von denen eine gröfser ist als a_{22}, eine zweite zwischen a_{22} und a_{33} liegt, und die dritte kleiner ist als a_{33}.

Wenn $a_{22} = a_{33}$ ist, so hat die linke Seite von (7) den Faktor $\omega - a_{22}$. Nach Abtrennung desselben bleibt der Faktor

$$(a_{11}-\omega)(a_{22}-\omega) - a_{12}^2 - a_{13}^2,$$

welcher für sehr grofse positive und sehr grofse negative Werte positiv und für $\omega = a_{22}$ negativ wird. Die Gleichung $\Delta(\omega) = 0$ hat also in diesem Falle wieder drei ungleiche Wurzeln, von denen die mittlere gleich a_{22} ist.

Für den Fall, dafs unter den Koefficienten a_{12}, a_{13}, a_{23} einer verschwindet und die beiden andern von null verschieden sind, hat die Gleichung $\Delta(\omega) = 0$ drei reelle ungleiche Wurzeln.

6. Wir wollen jetzt annehmen, zwei von den Koefficienten a_{23}, a_{12}, a_{31}, etwa a_{23} und a_{31} seien null, während der dritte (hier a_{12}) von null verschieden sein soll. In diesem Falle hat der Ausdruck $\Delta(\omega)$ den Faktor $a_{33} - \omega$; nach Abtrennung desselben bleibt der weitere Faktor

$$(a_{11}-\omega)(a_{22}-\omega) - a_{12}^2.$$

Da diese Funktion von ω für sehr grofse positive und negative Werte positiv, aber für $\omega = a_{22}$ negativ wird, so verschwindet sie für zwei ungleiche Werte von ω. Die Gleichung $\Delta(\omega) = 0$

kann nur zwei gleiche Wurzeln haben, wenn der letzte Ausdruck für $\omega = a_{33}$ verschwindet, oder wenn

$$(8)\quad (a_{11} - a_{33})(a_{22} - a_{33}) - a_{12}^2 = 0$$

ist.

Solange auch nur einer der drei Koefficienten a_{23}, a_{31}, a_{12} von null verschieden ist, kann die Gleichung $\Delta(\omega) = 0$ keine dreifache Wurzel besitzen. Die Existenz einer Doppelwurzel verlangt in dem Falle, dafs die drei Koefficienten a_{23}, a_{31}, a_{12} von null verschieden sind, zwei Gleichungen zwischen den sechs Koefficienten; wenn aber zwei von diesen Koefficienten verschwinden, so mufs noch eine Bedingung hinzutreten, welche für $a_{23} = a_{13} = 0$, $a_{12} \lesseqgtr 0$ durch die Gleichung (8) angegeben ist.

7. Wenn endlich $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$ ist, so ist unser Problem schon gelöst.

8. In der vorangehenden Untersuchung haben wir nur Beziehungen zwischen den gegebenen und den neuen Koefficienten gefunden, welche bestehen, sobald die durch die Gleichungen (1) und (2) angegebene Transformation möglich ist.

Um die Möglichkeit dieser Transformation zu beweisen, müssen wir die Koefficienten angeben, welche hierbei benutzt werden. Zu dem Ende gehen wir von den Gleichungen aus:

$$(9)\quad \begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 y_1 + \mu_1 y_2 + \nu_1 y_3 \\ x_2 &= \lambda_2 y_1 + \mu_2 y_2 + \nu_2 y_3 \\ x_3 &= \lambda_3 y_1 + \mu_3 y_2 + \nu_3 y_3. \end{aligned}$$

Hieraus geht unmittelbar hervor, dafs ist

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_1} = \lambda_1, \quad \frac{\partial x_1}{\partial y_2} = \mu_1, \quad \frac{\partial x_1}{\partial y_3} = \nu_1.$$

Jetzt differentiiere man die Gleichung (1) partiell nach y_1, y_2, y_3 und setze jedesmal die eben angegebenen Werte ein; dadurch erhalten wir die Auflösungen der Gleichungen (9) in folgender Form:

$$(10)\quad \begin{aligned} y_1 &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 \\ y_2 &= \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 \\ y_3 &= \nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \nu_3 x_3. \end{aligned}$$

Multiplizieren wir die letzten Gleichungen der Reihe nach mit λ_1, μ_1, ν_1, so liefert die Addition auf der linken Seite den

Wert x_1. Da aber die neue Gleichung für alle Wertsysteme x_1, x_2, x_3 erfüllt ist, so ergeben sich Beziehungen zwischen den neun Koefficienten der Gleichungen (9). Weitere Relationen dieser Art erhält man, indem man die Gleichungen (10) mit λ_2, μ_2, ν_2 und mit λ_3, μ_3, ν_3 multipliziert und die Produkte addiert. Hiernach ergeben sich die Gleichungen:

$$(11)\quad \begin{array}{ll} \lambda_1^2+\mu_1^2+\nu_1^2=1 & \lambda_1\lambda_2+\mu_1\mu_2+\nu_1\nu_2=0 \\ \lambda_2^2+\mu_2^2+\nu_2^2=1 & \lambda_1\lambda_3+\mu_1\mu_3+\nu_1\nu_3=0 \\ \lambda_3^2+\mu_3^2+\nu_3^2=1 & \lambda_2\lambda_3+\mu_2\mu_3+\nu_2\nu_3=0. \end{array}$$

In ähnlicher Weise kann man die Gleichungen (9) der Reihe nach entweder mit λ_1, λ_2, λ_3 oder mit μ_1, μ_2, μ_3 oder mit ν_1, ν_2, ν_3 multiplizieren. Die Gleichungen, welche hierdurch gewonnen werden, sind bereits in § 29, 16 Gl. (15) angegeben.

Endlich ist:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1\mu_1\nu_1 \\ \lambda_2\mu_2\nu_2 \\ \lambda_3\mu_3\nu_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_1\mu_1\nu_1 \\ \lambda_2\mu_2\nu_2 \\ \lambda_3\mu_3\nu_3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^2+\mu_1^2+\nu_1^2 & \lambda_1\lambda_2+\mu_1\mu_2+\nu_1\nu_2 & \lambda_1\lambda_3+\mu_1\mu_3+\nu_1\nu_3 \\ \lambda_1\lambda_2+\mu_1\mu_2+\nu_1\nu_2 & \lambda_2^2+\mu_2^2+\nu_2^2 & \lambda_2\lambda_3+\mu_2\mu_3+\nu_2\nu_3 \\ \lambda_1\lambda_3+\mu_1\mu_3+\nu_1\nu_3 & \lambda_2\lambda_3+\mu_2\mu_3+\nu_2\nu_3 & \lambda_3^2+\mu_3^2+\nu_3^2 \end{vmatrix}.$$

Die letzte Determinante hat aber wegen der Beziehungen (11) den Wert $+1$; daher ist

$$(12)\quad \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Für $\lambda_1=\mu_2=\nu_3=1$, $\mu_1=\nu_1=\lambda_2=\nu_2=\lambda_3=\mu_3=0$ hat die linke Seite von (12) den Wert $+1$. Wenn also das zweite Koordinatensystem aus dem ersten durch stetige Änderung erhalten wird, so mufs die Determinante stets den Wert $+1$ behalten. Wir dürfen auch sagen: Wofern das zweite Koordinatensystem mit dem ersten zur Deckung gebracht werden kann (ihm kongruent ist), so gilt die Beziehung:

$$(13)\quad \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix} = 1.$$

Legt man diesen Wert zu Grunde und löst jetzt die Gleichungen (9) in gewöhnlicher Weise auf, so ergeben sich folgende Gleichungen:

$$y_1 = (\mu_2\nu_3 - \mu_3\nu_2)\,x_1 + (\nu_2\lambda_3 - \nu_3\lambda_2)\,x_2 + (\lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2)\,x_3.$$

Durch Vergleichung dieser Gleichungen mit (10) folgen die Relationen:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 = \mu_2\nu_3 - \mu_3\nu_2,\ \mu_1 = \nu_2\lambda_3 - \nu_3\lambda_2,\ \nu_1 = \lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2,\\
(14)\quad &\lambda_2 = \mu_3\nu_1 - \mu_1\nu_3,\ \mu_2 = \nu_3\lambda_1 - \nu_1\lambda_3,\ \nu_3 = \lambda_3\mu_1 - \lambda_1\mu_3,\\
&\lambda_3 = \mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1,\ \mu_3 = \nu_1\lambda_2 - \nu_2\lambda_1,\ \nu_3 = \lambda_1\mu_2 - \mu_1\nu_2.
\end{aligned}$$

9. Bei der weiteren Behandlung wollen wir uns auf den Fall beschränken, daſs keiner der Koefficienten a_{12}, a_{13}, a_{23} verschwindet und daſs sich unter den Gröſsen e_1, e_2, e_3 (und demnach auch unter den Wurzeln ω_1, ω_2, ω_3) keine gleiche befinden. Wir ersetzen die Gleichung (2) durch die folgende:

$$(15)\quad e_1x_1^2 + e_2x_2^2 + e_3x_3^2 + (m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3)^2 = \omega_1y_1^2 + \omega_2y_2^2 + \omega_3y_3^2.$$

Durch Differentiation nach x_1 erhalten wir hieraus die neue identische Gleichung:

$$(16)\quad e_1x_1 + m_1(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3) = \omega_1\lambda_1y_1 + \omega_2\mu_1y_2 + \omega_3\nu_1y_3.$$

Hierin setzen wir $y_1 = 1$, $y_2 = y_3 = 0$ und demnach $x_1 = \lambda_1$, $x_2 = \lambda_2$, $x_3 = \lambda_3$; darauf setzen wir $y_2 = 1$, $y_1 = y_3 = 0$, $x_1 = \mu_1$, $x_2 = \mu_2$, $x_3 = \mu_3$ und zuletzt noch $y_1 = y_2 = 0$, $y_3 = 1$. In gleicher Weise verfahren wir mit den Gleichungen, welche aus (15) durch Differentiation nach x_2 und nach x_3 hervorgehen. Um die gewonnenen Gleichungen bequem zu schreiben, führen wir die Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1m_1 + \lambda_2m_2 + \lambda_3m_3 = M_1\\
(17)\quad &\mu_1m_1 + \mu_2m_2 + \mu_3m_3 = M_2\\
&\nu_1m_1 + \nu_2m_2 + \nu_3m_3 = M_3.
\end{aligned}$$

Entsprechend den zwischen den Gleichungen (9) und (10) bestehenden Beziehungen können die Gleichungen (17) in folgender Weise aufgelöst werden:

$$\begin{aligned}
&m_1 = \lambda_1M_1 + \mu_1M_2 + \nu_1M_3\\
(18)\quad &m_2 = \lambda_2M_1 + \mu_2M_2 + \nu_2M_3\\
&m_3 = \lambda_3M_1 + \mu_3M_2 + \nu_3M_3.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Gröfsen können wir die eben gefundenen Gleichungen in folgender Weise schreiben:

$$(19)\quad \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{m_1 M_1}{\omega_1 - e_1}, & \mu_1 &= \frac{m_1 M_2}{\omega_2 - e_1}, & \nu_1 &= \frac{m_1 M_3}{\omega_3 - e_1} \\ \lambda_2 &= \frac{m_2 M_1}{\omega_1 - e_2}, & \mu_2 &= \frac{m_2 M_2}{\omega_2 - e_2}, & \nu_2 &= \frac{m_2 M_3}{\omega_3 - e_2} \\ \lambda_3 &= \frac{m_3 M_1}{\omega_1 - e_3}, & \mu_3 &= \frac{m_3 M_2}{\omega_2 - e_3}, & \nu_3 &= \frac{m_3 M_3}{\omega_3 - e_3}. \end{aligned}$$

10. Die Gleichungen derselben Kolonne mögen je der Reihe nach mit m_1, m_2, m_3 multipliziert und dann addiert werden. Dann kann man wegen der Gleichungen (17) beiderseits entweder durch M_1 oder durch M_2 oder durch M_3 dividieren. Somit folgen die Gleichungen:

$$(20)\quad \begin{aligned} \frac{m_1^2}{\omega_1 - e_1} + \frac{m_2^2}{\omega_1 - e_2} + \frac{m_3^2}{\omega_1 - e_3} &= 1 \\ \frac{m_1^2}{\omega_2 - e_1} + \frac{m_2^2}{\omega_2 - e_2} + \frac{m_3^2}{\omega_2 - e_3} &= 1 \\ \frac{m_1^2}{\omega_3 - e_1} + \frac{m_2^2}{\omega_3 - e_2} + \frac{m_3^2}{\omega_3 - e_3} &= 1. \end{aligned}$$

Dadurch haben wir das bereits früher gewonnene Resultat wiedergefunden, dafs $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ die Wurzeln der Gleichung sind:

$$\frac{m_1^2}{\omega - e_1} + \frac{m_2^2}{\omega - e_2} + \frac{m_3^2}{\omega - e_3} = 1.$$

Eine weitere Reihe interessanter Gleichungen erhalten wir, indem wir die in derselben Zeile von (19) stehenden Gleichungen je mit M_1, M_2, M_3 multiplizieren und die Summe durch m_1 oder m_2 oder m_3 dividieren. Dadurch werden wir auf die Gleichungen geführt:

$$(21)\quad \begin{aligned} \frac{M_1^2}{\omega_1 - e_1} + \frac{M_2^2}{\omega_2 - e_1} + \frac{M_3^2}{\omega_3 - e_1} &= 1 \\ \frac{M_1^2}{\omega_1 - e_2} + \frac{M_2^2}{\omega_2 - e_2} + \frac{M_3^2}{\omega_3 - e_2} &= 1 \\ \frac{M_1^2}{\omega_1 - e_3} + \frac{M_2^2}{\omega_2 - e_3} + \frac{M_3^2}{\omega_3 - e_3} &= 1. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind geeignet, die unbekannten Gröfsen M_1, M_2, M_3 zu liefern. Um zu diesem Ziele auf dem einfachsten

Wege zu gelangen, denken wir uns M_1, M_2, M_3 gegeben und beachten, dafs dann e_1, e_2, e_3 die Wurzeln der Gleichung sind:

$$\frac{M_1^2}{\omega_1 - \varepsilon} + \frac{M_2^2}{\omega_2 - \varepsilon} + \frac{M_3^2}{\omega_3 - \varepsilon_1} = 1.$$

Demnach ist identisch:

$$\begin{aligned} &M_1^2(\omega_2 - \varepsilon)(\omega_3 - \varepsilon) + M_2^2(\omega_1 - \varepsilon)(\omega_3 - \varepsilon) \\ &\quad + M_3^2(\omega_1 - \varepsilon)(\omega_2 - \varepsilon) - (\omega_1 - \varepsilon)(\omega_2 - \varepsilon)(\omega_3 - \varepsilon) \\ &\quad = (\varepsilon - e_1)(\varepsilon - e_2)(\varepsilon - e_3). \end{aligned}$$

Setzt man in dieser Gleichung $\varepsilon = \omega_1$, so fallen die Unbekannten M_2^2 und M_3^2 ganz weg. Ebenso ergiebt sich der Wert von M_2^2 für $\varepsilon = \omega_2$ und der von M_3^2 für $\varepsilon = \omega_3$.

Wir erhalten:

$$(22)\quad \begin{aligned} M_1^2 &= \frac{(\omega_1 - e_1)(\omega_1 - e_2)(\omega_1 - e_3)}{(\omega_1 - \omega_2)(\omega_1 - \omega_3)} \\ M_2^2 &= \frac{(\omega_2 - e_1)(\omega_2 - e_2)(\omega_3 - e_3)}{(\omega_2 - \omega_1)(\omega_2 - \omega_3)} \\ M_3^2 &= \frac{(\omega_3 - e_1)(\omega_3 - e_2)(\omega_3 - e_3)}{(\omega_3 - \omega_1)(\omega_3 - \omega_2)}. \end{aligned}$$

11. Wegen der Grenzen, zwischen denen nach den obigen Entwicklungen die Wurzeln ω_1, ω_2, ω_3 liegen, sind die Werte für M_1^2, M_2^2, M_3^2 positiv. Daher ergeben sich für M_1, M_2, M_3, sowie für λ_1, μ_1, ν_1 ... reelle Werte. Die Vorzeichen für M_1, M_2, M_3 sind ganz willkürlich, wenn es sich nur darum handelt, die Transformationen (1) und (2) auszuführen. Wenn aber das neue Koordinatendreikant dem gegebenen kongruent sein soll, wenn somit die Gleichung (13) erfüllt sein soll, so kann man zweien dieser Gröfsen ein willkürliches Vorzeichen beilegen und hat alsdann der dritten ein bestimmtes Zeichen zu geben.

12. Es erübrigt jetzt noch zu zeigen, dafs vermittelst der erhaltenen Koefficienten auch wirklich die Gleichungen (1) und (2) befriedigt werden. Zu dem Ende berücksichtigen wir, dafs die Gleichungen (22) nur die Auflösungen der Gleichungen (21) sind, wir also diese letzteren zu Grunde legen und somit annehmen dürfen, es seien die Gleichungen (9), (19), (20) und (21) befriedigt. Aus den Gleichungen (19), (20) und (21) gehen aber mit Leichtigkeit die Gleichungen (17) und (18) hervor. Weil die letzten sechs Gleichungen zusammenbestehen, müssen aus den

Gleichungen (9) die Gleichungen (10) folgen. Unsere Koefficienten leisten also die durch die Gleichung (1) geforderte Transformation.

Um zu zeigen, dafs auch die Transformation (2) oder, was bei unsern Voraussetzungen dasselbe ist, die Transformation (15) ausgeführt wird, beachten wir zunächst, dafs ist:

$$M_1y_1 + M_2y_2 + M_3y_3 = m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3.$$

Jetzt multiplizieren wir die aus den Gleichungen (19) hervorgehenden Gleichungen der Reihe nach mit y_1, y_2, y_3 und addieren; dadurch erhalten wir die Gleichung (16). In entsprechender Weise werden wir auf die Gleichungen geführt:

$$e_2x_2 + m_2(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3) = \omega_1\lambda_2y_1 + \omega_2\mu_2y_2 + \omega_3\nu_2y_3,$$

$$e_3x_3 + m_3(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3) = \omega_1\lambda_3y_1 + \omega_2\mu_3y_3 + \omega_3\nu_3y_3.$$

Indem wir die Gleichung (16) und die beiden letzten der Reihe nach mit x_1, x_2, x_3 multiplizieren und addieren, wird auf der rechten Seite die Gröfse ω_1y_1 mit $\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \lambda_3x_3$ oder mit y_1 multipliziert u. s. w. Wir erhalten also die Gleichung (15).

Übungen:

1) Man berechne die Transformations-Koefficienten für die Flächen:

a) $11x^2 + 10y^2 + 6z^2 - 12xy - 8yz + 4zx = 12.$

b) $7x^2 - 13y^2 + 6z^2 + 12yz - 12zx + 24xy + 84 = 0.$

2) Man berechne die Determinante (13) unter Einsetzung der in (19) angegebenen Werte; ebenso leite man aus den Gleichungen (18)—(21) die Gleichungen (11) her.

3) Man ändere die durchgeführten Entwicklungen so um, dafs sie auch auf den Fall anwendbar sind, wo einige der Koefficienten a_{12}, a_{13}, a_{23} verschwinden.

4) Das Hauptaxenproblem soll rein algebraisch auf beliebig viele Variabelen übertragen werden.

(Die Übertragung der mitgeteilten Resultate ist leicht; das Problem bietet aber auch in seiner Weiterführung, an der sich die hervorragendsten Mathematiker beteiligt haben, grofses Interesse. Darüber vergleiche man mehrere Vorlesungen in Hesses Geometrie des Raumes, sowie zwei Abhandlungen von Weierstrafs vom Jahre 1858 und 1868, Werke B. I S. 233 ff.; B. II S. 19 ff.)

§ 31.

Nochmalige Einteilung der Flächen zweiter Ordnung.

I. Wir haben in den beiden letzten Paragraphen gesehen, daſs wir der in beliebigen rechtwinkligen Koordinaten gegebenen Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung unter Beibehaltung des Anfangspunktes für ein neues rechtwinkliges Koordinatensystem die Form geben können:

$$(1)\quad a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 + 2b_3x_3 + c = 0.$$

Diese Form wollen wir der Einteilung der Flächen zweiter Ordnung zu Grunde legen und zuerst den Fall betrachten, wo die Koefficienten a_1, a_2, a_3 von null verschieden sind. Indem wir setzen:

$$x_1 + \frac{b_1}{a_1} = x,\ x_2 + \frac{b_2}{a_2} = y,\ x_3 = \frac{b_3}{a_3} = z,$$

nimmt die Gleichung (1) die Form an:

$$\text{I.}\quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0.$$

Auf diese Form kann die Gleichung jedesmal gebracht werden, wenn die Fläche zweiter Ordnung die unendlichferne Ebene in einem eigentlichen Kegelschnitte schneidet.

I A. Für den Fall, daſs D von null verschieden ist, stellt die Gleichung I eine eigentliche Mittelpunktsfläche dar. Bei der weiteren Einteilung haben wir die Vorzeichen der Quotienten A : D, B : D, C : D in Betracht zu ziehen; wir werden dadurch auf folgende Arten geführt:

IA) a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$ (imaginäre Fläche)

b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (Ellipsoid)

c) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (einschaliges Hyperboloid)

d) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (zweischaliges Hyperboloid).

I B. Wenn der Koefficient D in I gleich null ist, so stellt die Gleichung:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0$$

einen Kegel im engern Sinne dar. Für die weitere Einteilung haben wir zu unterscheiden, ob die drei Koefficienten A, B, C

dasselbe Vorzeichen haben oder ob ein Vorzeichen von den beiden andern verschieden ist. Demnach zerfallen die Kegel in zwei Arten:

I B) a) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ (imaginärer Kegel)

b) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ (reeller Kegel).

II. Wir nehmen jetzt an, in der Gleichung (1) sei einer der Koefficienten a_1, a_2, a_3 gleich null; es sind das diejenigen Flächen, welche mit der unendlichfernen Ebene ein Geradenpaar gemeinsam haben. Wenn $a_3 = 0$, aber a_1 und a_2 von null verschieden sind, so können wir $x_1 + \frac{b_1}{a_1} = y_1$, $x_2 + \frac{b_2}{a_2} = y_2$, $x_3 = y_3$ setzen; wir finden dadurch die neue Form der Gleichung:

$$\text{II.}\quad a_1y_1^2 + a_2y_2^2 + 2b_3y_3 + h = 0.$$

Diese Form geht, wenn $b_3 \neq 0$ ist und $y_1 = x$, $y_2 = y$, $y_3 + \frac{h}{2b_3} = z$ gesetzt wird, über in

$$\text{II A)}\quad Ax^2 + By^2 + 2Cz = 0.$$

Es ist dies die Gleichung eines Paraboloids, d. h. einer eigentlichen Fläche zweiter Ordnung, welche von der unendlichfernen Ebene berührt wird. Da wir z mit $-z$ vertauschen dürfen, ist das Vorzeichen von C gleichgültig; wir erhalten demnach nur die beiden Arten:

II A) a): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2\frac{z}{c}$ (elliptisches Paraboloid)

b): $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2\frac{z}{c}$ (hyperbolisches Paraboloid).

Wenn in der Form II der Koefficient $b_3 = 0$, aber $h \neq 0$ ist, so stellt die Gleichung

$$\text{II B)}\quad a_1x^2 + a_2y^2 + h = 0$$

einen Cylinder dar, d. h. einen Kegel, dessen Spitze im Unendlichen liegt. In Bezug auf das Vorzeichen der Quotienten $a_1 : h$ und $a_2 : h$ haben wir drei Fälle zu unterscheiden:

II B) a): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$ (imaginärer Cylinder)

b): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (elliptischer Cylinder)

c): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (hyperbolischer Cylinder).

Endlich stellt die Form II für $b_3 = h = 0$ ein Paar einander schneidender Ebenen dar:

II C) a): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ (Paar imaginärer Ebenen)

b): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ (Paar reeller Ebenen).

III. Wir haben jetzt die Gleichung (1) in dem Falle zu untersuchen, daſs zwei der Koefficienten a_1, a_2, a_3 verschwinden. Die Fläche hat mit der unendlichfernen Ebene eine Doppellinie gemeinschaftlich. Für $a_2 = a_3 = 0$ wird die Gleichung der Fläche:

III. $a_1 x_1^2 + 2b_1 x_1 + 2b_2 x_2 + 2b_3 x_3 + c = 0.$

Indem wir die Ebene $x_1 = 0$ parallel ihrer Anfangslage verschieben, erhalten wir für den Fall, daſs die Koefficienten b_2 und b_3 nicht beide verschwinden, durch eine einfache Umgestaltung die Gleichung:

III A) $x^2 + 2by = 0$ (parabolischer Cylinder).

Wenn aber in III die beiden Koefficienten b_2 und b_3 verschwinden, ohne daſs c null ist, so ergeben sich die beiden Arten:

III B) a) $x^2 + a^2 = 0$ (Paar imaginärer paralleler Ebenen)

b) $x^2 - a^2 = 0$ (Paar reeller imaginärer Ebenen).

Endlich können in III die Koefficienten b_2, b_3, c gleich null sein; dann stellt die Gleichung:

III C): $x^2 = 0$

eine Doppelebene dar.

Hierdurch sind wir zu denselben Arten geführt worden, welche wir bereits in § 19, 19 (S. 150) erhalten haben. Während wir aber früher die Winkel nicht bestimmen konnten, unter denen die Koordinatenaxen zu einander geneigt sind, haben wir jetzt erkannt, daſs sich die für die einzelne Art charakteristische Form jedesmal unter Anwendung rechtwinkliger Koordinaten erreichen läſst. Auch erhalten wir die einzelnen Arten in verschiedener Reihenfolge. An der früheren Stelle berücksichtigten wir nämlich zunächst die projektiven Eigenschaften und dann erst die Lage zur unendlichfernen Ebene; hier jedoch schlugen wir den umgekehrten Weg ein, indem wir das Einteilungsprincip zuvörderst

von der Lage zur unendlichfernen Ebene hernahmen und alle weiteren Eigenschaften später in Betracht zogen.

Übungen:

1) Man gebe die Art der Flächen an, welche durch die folgenden Gleichungen in rechtwinkligen Koordinaten dargestellt werden:

a) $5x^2 + 6y^2 + 7z^2 - 4xy - 4yz - 4 = 0$,

b) $-x^2 + 10y^2 + 7z^2 + 16xy + 8yz + 6zx + 2x + 2y + 2z = 8$,

c) $7x^2 + y^2 + 2z^2 + 6xy + 8xz - 4yz + 16 = 0$,

d) $(az + by)^2 = \frac{2a^2b^2}{c}x + 2abyz$,

e) $4z^2 - 5y^2 - x^2 - 8zx + 10xy + 2x - 20y + 28z = 10$,

f) $z^2 - 6y - 8x = 0$,

g) $5x^2 + 5y^2 - 37x = 0$,

h) $x^2 + 6yz + 3zx + 3xy - 8x - 10y - 9z + 15 = 0$.

(Es genügt, für die neuen Koefficienten Grenzen anzugeben, zwischen denen sie liegen, ohne sie genau auszurechnen. Zugleich mufs empfohlen werden, auch nach der in § 19 angegebenen Methode die Art zu bestimmen.)

2) Welche Flächen können in rechtwinkligen Koordinaten durch die Gleichung dargestellt werden:

$$a(x^2 + 2yz) + b(y^2 + 2zx) + c(z^2 + 2xy) = 1.$$

Man gebe die Bedingungen an, denen die Koefficienten in den einzelnen Fällen genügen müssen. Speciell wähle man

α) $a = b = 1$, $c = 2$; β) $a = -b = 1$, $c = -2$;

γ) $a = b = c = 1$; δ) $a = b = c = -1$;

ε) $a = -b = 5$, $c = 11$.

3) a) Man nehme an, in der Gleichung

$$(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3)^2 + e_1x_1^2 + e_2x_2^2 + e_3x_3^2 = 1$$

behielten e_1, e_2, e_3 ihren Wert bei, während m_1, m_2, m_3 ihre Werte beliebig ändern; es soll untersucht werden, ob hierbei auch die Arten der Flächen Änderungen erleiden.

b) Umgekehrt sollen m_1, m_2, m_3 feste Werte haben und zu e_1, e_2, e_3 jedesmal dieselbe konstante Gröfse 1 hinzugefügt werden; man soll die verschiedenen Arten angeben, welche jetzt durch die obige Gleichung dargestellt werden.

4) a) Der Mittelpunkt einer in Cartesischen Koordinaten gegebenen Fläche zweiter Ordnung $f(x, y, z) = 0$ wird durch Auflösung der Gleichungen gefunden:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

b) Man bestimme hiernach den Mittelpunkt der Fläche:

$$7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4yz - 4xy + 10x + 4y + 6z + 4 = 0.$$

c) Wie lautet hiernach die Bedingung für einen (elliptischen oder hyperbolischen) Cylinder?

d) Man wende die hiernach geltende Regel für die Flächen an:

$$x^2 - y^2 - z^2 + 2yz + x + y - z = 5$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2x + 2y = 0.$$

5) Die rechtwinkligen Koordinaten mögen mit x_1, x_2, x_3 bezeichnet werden. Wenn jetzt die Gleichung $\Sigma a_{ix} x_i x_x = 1$ ein Ellipsoid darstellen soll, so mufs die Gleichung $\Delta(\omega) = 0$ drei positive Wurzeln haben. Alsdann müssen (nach Üb. 2) zu I § 18 S. 111) die drei Ausdrücke $\Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33}$, $a_{11} a_{22} - a_{12}^2$, a_{11} positiv und von null verschieden sein. In diesem Falle sind auch die Gröfsen a_{22}, a_{33}, $a_{11} a_{33} - a_{13}^2$, $a_{22} a_{33} - a_{23}^2$ positiv mit Ausschlufs des Wertes null.

6) a) Legt man, wie in 5) die Gleichung wieder in der Form $\Sigma a_{ix} x_i x_x = 1$ zu Grunde, so haben die drei Wurzeln ω_1, ω_2, ω_3 eine feste geometrische Bedeutung. Nun ist

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$
$$\omega_1\omega_2 + \omega_1\omega_3 + \omega_2\omega_3 = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) + (a_{11}a_{33} - a_{13}^2) + (a_{22}a_{33} - a_{23}^2)$$
$$\omega_1\omega_2\omega_3 = \Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33}.$$

Daher ändern sich auch die auf der rechten Seite dieser Gleichungen stehenden Ausdrücke nicht, wenn man das gegebene Koordinatensystem durch irgend drei zu einander senkrechte Durchmesser ersetzt.

b) Der Koefficient a_{11} stellt, falls er positiv ist, das reciproke Quadrat der auf der x-Axe vom Mittelpunkte aus abgeschnittenen Strecke dar. Somit gilt der Satz:

Die Summe der reciproken Quadrate von irgend drei auf einander senkrecht stehenden Durchmessern einer Fläche zweiter Ordnung ist eine konstante Gröfse.

c) Ebenso schneidet, falls der Ausdruck $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ positiv ist, die xy-Ebene aus der Fläche eine Ellipse aus, für welche das reciproke Quadrat bis auf den Faktor $1 : \pi^2$ durch jenen Ausdruck dargestellt wird. Wir erhalten demnach den Satz:

Wenn drei durch den Mittelpunkt einer Fläche zweiter Ordnung senkrecht zu einander gelegte Ebenen eine vorgelegte Fläche zweiter Ordnung in Ellipsen schneiden, so ist die Summe der reciproken Quadrate der Flächenräume konstant.

d) Die beiden vorstehenden Sätze gelten für das Ellipsoid in voller Allgemeinheit.

e) Auf die angegebene Weise ergiebt sich der Satz, daſs das reciproke Quadrat aus dem Volumen des Ellipsoids bis auf den Faktor $9 : 16\pi^2$ durch die Determinante $\Sigma \pm a_{11}a_{22}a_{33}$ dargestellt wird.

7) Für Tripel konjugierter Durchmesser eines Ellipsoids gelten die folgenden Sätze, welche genau so bewiesen werden, wie die entsprechenden Sätze für die Ellipse.

a) Die Summe der Quadrate von drei zu einander konjugierten Durchmessern ist konstant.

b) Die Summe der Quadrate der Projektionen von drei konjugierten Durchmessern auf eine beliebige gerade Linie oder auf eine beliebige Ebene ist konstant.

c) Das Parallelepipedon, dessen Kanten drei konjugierte Halbmesser sind, hat ein konstantes Volumen.

d) Durchschneidet man einen Cylinder, dessen Mantel ein Ellipsoid berührt, durch zwei zu den Kanten senkrechte Tangentialebenen, so hat der abgeschnittene Körper ein konstantes Volumen.

e) Wenn mehrere Tangentialebenen des Ellipsoids gleichen Abstand vom Mittelpunkte haben, so schneiden die zu ihnen parallelen Durchmesserebenen aus dem Ellipsoid flächengleiche Ellipsen aus.

8) Umwandlung der Hesseschen Ebenenkoordinaten.

a) Es seien sowohl x_1, x_2, x_3, als auch y_1, y_2, y_3 rechtwinklige Punktkoordinaten; als Ebenenkoordinaten mögen zu den ersteren die u_1, u_2, u_3, u_4, zu den letzteren die v_1, v_2, v_3, v_4 gehören.

Setzen wir

$$x_1 = \lambda_1 y_1 + \mu_1 y_2 + \nu_1 y_3 + a_1$$

$$x_2 = \lambda_2 y_1 + \mu_2 y_2 + \nu_2 y_3 + a_2$$
$$x_3 = \lambda_3 y_1 + \mu_3 y_2 + \nu_3 y_3 + a_3,$$

so geht der Ausdruck $x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + u_4$ in eine Funktion von y_1, y_2, y_3 und u_1, u_2, u_3, u_4 über, und da diese auch gleich $y_1 v_1 + y_2 v_2 + y_3 v_3 + v_4$ sein mufs, folgen die Formeln:

$$v_1 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$$
$$v_2 = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \mu_3 u_3$$
$$v_3 = \nu_1 u_1 + \nu_2 u_2 + \nu_3 u_3$$
$$v_4 = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + u_4.$$

b) Man leite diese Formeln direkt aus der geometrischen Bedeutung der Hesseschen Koordinaten her.

c) Man versuche, von den Formeln (11) § 4, 9 (S. 28) aus zu den angegebenen Ausdrücken zu gelangen.

9) Mit Hilfe der in 8) a) angegebenen Formeln soll die Gleichung:

$$\Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota u_\varkappa + 2u_4 \Sigma B_\iota u_\iota + C u_4^2 = 0 \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2, 3)$$

für Hessesche Koordinaten auf ihre einfachste Form gebracht werden.

a) Wenn $C \neq 0$ ist, so kann man durch Parallelverschiebung ($\lambda_1 = \mu_2 = \nu_3 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = 0$) erreichen, dafs die neue Form wird $\Sigma A_{\iota\varkappa}' u_\iota u_\varkappa + u_4^2 = 0$. Dann läfst sich durch bloíse Drehung ($a_1 = a_2 = a_3 = 0$) eine der folgenden Formen erreichen, in denen e_1, e_2, e_3 als von null verschieden vorausgesetzt werden:

$e_1 u_1^2 + e_2 u_2^2 + e_3 u_3^2 + u_4^2 = 0$ (eigentliche Mittelpunktsfläche)
$e_1 u_1^2 + e_2 u_2^2 + u_4^2 = 0$ (Mittelpunktskurve)
$e_1 u_1^2 + u_4^2 = 0$ (Punktepaar im Endlichen)
$u_4^2 = 0$ (Doppelpunkt im Endlichen).

b) Wenn $C = 0$ ist, aber $B_1 u_1 + B_2 u_2 + B_3 u_3$ nicht identisch verschwindet, so erreicht man durch Drehung die neue Form

$$\Sigma A_{\iota\varkappa}' u_\iota u_\varkappa + 2u_3 u_4 = 0,$$

wo $A_{12}' = 0$ sein soll.

Durch Verschiebung erreicht man, dafs auch die Koefficienten von $u_1 u_3$, $u_2 u_3$, u_3^2 verschwinden. Demnach erhalten wir folgende Arten:

$e_1 u_1^2 + e_2 u_2^2 + 2u_3 u_4 = 0$ (Paraboloid)
$e_1 u_1^2 + 2u_3 u_4 = 0$ (Parabel)

$u_3 u_4 = 0$ (Paar aus einem eigentlichen und einem uneigentlichen Punkte).

c) Wenn endlich $C = B_1 = B_2 = B_3 = 0$ ist, so genügt die Drehung, um eine der folgenden Formen zu erhalten:

$e_1 u_1^2 + e_2 u_2^2 + e_3 u_3^2 = 0$ (Kurve im Unendlichfernen)

$e_1 u_1^2 + e_2 u_2^2 = 0$ (unendlichfernes Punktepaar)

$u_1^2 = 0$ (unendlichferner Doppelpunkt).

d) Man führe die weitere Einteilung der in a), b), c) angegebenen Arten durch.

e) Inwiefern wird bei der durchgeführten Untersuchung die unendlichferne Ebene bevorzugt?

10) a) Man übertrage die Untersuchungen der §§ 29 und 30 auf das Problem, die Gleichung

$$\Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota u_\varkappa = u_4^2 \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2, 3)$$

unter Beibehaltung von Hesseschen Koordinaten auf ihre einfachste Form zu bringen.

b) Man zeige, daſs die Ausdrücke

$A_{11} + A_{22} + A_{33}$, $(A_{11}A_{22} - A_{12}^2) + \ldots$, $\Sigma \pm A_{11}A_{22}A_{33}$

ihren Wert beibehalten, wenn man die Koordinaten unter Beibehaltung des Anfangspunktes und der Rechtwinkligkeit beliebig verändert.

c) Wenn die Gleichung ein Ellipsoid darstellt, so ist der Koefficient A_{11} das Quadrat des Abstandes des Mittelpunktes von einer zur yz-Ebene parallelen Tangentialebene. Demnach gilt der Satz:

Die Summe der Quadrate der Abstände des Mittelpunktes einer Fläche zweiter Ordnung von irgend drei zu einander senkrechten Tangentialebenen derselben ist eine konstante Gröſse.

d) Der geometrische Ort des Schnittpunktes von drei zu einander senkrechten Tangentialebenen einer Oberfläche zweiter Ordnung ist eine Kugel.

e) Wenn der Ausdruck $A_{11} + A_{22} + A_{33}$ negativ ist, so besitzt die Fläche keine drei auf einander senkrecht stehende Tangentialebenen.

f) Wenn $A_{11} + A_{22} + A_{33} = 0$ ist, so können nur drei solche Tangentialebenen der Fläche auf einander senkrecht stehen, welche zugleich den Asymptotenkegel berühren.

g) Wenn die Fläche von einem elliptischen Cylinder berührt

wird, dessen Axe die z-Axe ist, so stellt der Ausdruck $A_{11}A_{22}-A_{12}^2$ bis auf einen festen Zahlfaktor das Quadrat der Ellipse dar, in welchem die xy-Ebene von diesem Cylinder geschnitten wird. Wir wollen unter der gemachten Voraussetzung diese Ellipse als die Projektion der Fläche auf die xy-Ebene bezeichnen. Hiernach dürfen wir sagen:

Die Summe aus den Quadraten der Projektionen einer Fläche zweiter Ordnung auf irgend drei zu einander senkrechte Ebenen ist eine konstante Gröfse.

h) Wenn dieselbe Fläche in zusammengehörigen rechtwinkligen Punkt- und Ebenenkoordinaten vermittelst der Gleichungen $\Sigma a_{ik}x_i x_k = 1$ und $\Sigma A_{ik}u_i u_k = u_4^2$ dargestellt wird, so soll die Beziehung der Koefficienten a_{ik} zu den Koefficienten A_{ik} angegeben und die in Üb. 6) a) und in Üb. 9) b) aufgestellten Invarianten in doppelter Weise ausgedrückt werden.

11) a) Im allgemeinen enthält eine Fläche zweiter Ordnung keine drei senkrecht zu einander geneigte gerade Linien; sobald aber ein einziges derartiges Tripel auf der Fläche liegt, enthält sie deren unendlich viele.

Erster Beweis: Wenn ein derartiges Tripel der Fläche angehört, liegen in ihrer unendlichfernen Kurve die Eckpunkte eines Polardreiecks zum unendlichfernen Kugelkreise; somit folgt der Satz aus Üb. 4) c) d) zu I § 21 (I S. 128).

Zweiter Beweis: Die unendlichferne Kurve $\Sigma a_{ik}x_i x_k = 0$ mufs zum Kugelkreise $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0$ in der angegebenen Beziehung stehen; also mufs $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$ sein.

Dritter Beweis: Man kann die Koordinatenaxen den Geraden parallel wählen; dann mufs $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$ sein; die Summe $a_{11} + a_{22} + a_{33}$ bleibt aber nach Übung 6) für jede Wahl der rechtwinkligen Koordinaten ungeändert.

(Es wird empfohlen, auch die Beweise der in den folgenden Übungen angeführten Lehrsätze nach den verschiedenen, hier angedeuteten Richtungen hin durchzuführen.)

b) Zwei Systeme von je drei geraden Linien, welche von demselben Punkte ausgehen und auf einander senkrecht stehen, gehören einem Kegel zweiter Ordnung an.

c) Ein Kegel, welcher drei auf einander senkrecht stehende Kanten enthält, heifst ein gleichseitiger Kegel. Die Gleichung

desselben kann für rechtwinklige Koordinaten auf die Form gebracht werden:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2},$$

wo $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{c^2}$ ist.

(Man vergleiche für die folgenden Übungen die in I § 29 unter 2) zusammengestellten Sätze.)

d) Ein Büschel konzentrischer Kegel enthält entweder einen einzigen gleichseitigen Kegel, oder alle seine Kegel sind gleichseitig. Im letzteren Falle gehören ihm drei Paare von Ebenen an, die auf einander senkrecht stehen.

e) Jeder Kegel, der durch die drei Kanten eines Dreikants und seinen Höhenstrahl geht, ist gleichseitig.

(Durch zwei Ebenenpaare, deren Ebenen je auf einander senkrecht stehen, wird ein Büschel von lauter gleichseitigen Kegeln bestimmt.)

f) Alle gleichseitigen Kegel, die durch drei gerade Linien gehen, welche sich in demselben Punkte schneiden, enthalten auch einen festen vierten Strahl.

g) Die drei Kanten eines Dreikants und der zugehörige Höhenstrahl haben die Eigenschaft, daſs, welche drei von diesen vier Strahlen auch zu Kanten eines Dreikants gewählt werden, der vierte jedesmal der Höhenstrahl ist.

h) Jede auf einer Erzeugenden eines gleichseitigen Kegels senkrechte Ebene schneidet aus der Fläche eine gleichseitige Hyperbel aus.

(Kennt man die Richtung der Asymptoten der Schnittlinie?)

i) Sobald irgend eine auf einer Erzeugenden eines Kegels senkrechte Ebene aus ihm eine gleichseitige Hyperbel ausschneidet, ist er selbst gleichseitig.

k) Wenn der gleichseitige Kegel für zwei verschiedene rechtwinklige Systeme (x, y, z) und (ξ, η, ζ) die Gleichungen hat:

$$\alpha yz+\beta zx+\gamma xy=0 \text{ und } \alpha'\eta\zeta+\beta'\zeta\xi+\gamma'\xi\eta=0,$$

so muſs sein:

$$\frac{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^3}{(\alpha\beta\gamma)^2}=\frac{(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)^3}{(\alpha'\beta'\gamma')^2}.$$

(Denkt man sich die erste Gleichung vermittelst der unter (13) § 29 angegebenen Gleichungen transformiert, so bleiben die Ausdrücke $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ und $\alpha\beta\gamma$ ungeändert; nun darf man die neue Gleichung mit einer beliebigen Konstanten multiplizieren.)

l) Wenn zwei Kegel für dasselbe rechtwinklige System durch die Gleichungen dargestellt werden:

$$\alpha yz + \beta zx + \gamma xy = 0 \text{ und } \alpha' yz + \beta' zx + \gamma' xy = 0,$$

und zwischen den Koefficienten die unter k) angegebene Beziehung besteht, so sind die Kegel kongruent.

m) Der Ort der Schnittpunkte von irgend drei auf einander senkrecht stehenden Tangenten an eine Fläche zweiter Ordnung ist selbst wieder eine Fläche zweiter Ordnung.

Die Gleichung des vom Punkte (x', y', z') an die Fläche $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1$ gelegten Tangentialkegels ist nach Üb. 4 zu § 15 (S. 115):

$$(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 - 1)(\alpha x'^2 + \beta y'^2 + \gamma z'^2 - 1) - (\alpha x x' + \beta y y' + \gamma z z' - 1)^2 = 0.$$

Damit dieser Kegel gleichseitig ist, mufs nach a) die Summe der Koefficienten von x^2, y^2, z^2 verschwinden; es mufs daher sein:

$$\alpha(\beta + \gamma) x'^2 + \beta(\gamma + \alpha) y'^2 + \gamma(\alpha + \beta) z'^2 = \alpha + \beta + \gamma.$$

Ist die Gleichung der gegebenen Fläche $\alpha x^2 + \beta y^2 = 2z$, so wird die Gleichung des Ortes:

$$\alpha\beta(x^2 + y^2) - 2(\alpha + \beta) z - 1 = 0.$$

12) a) Wenn ein einschaliges Hyperboloid unter den Erzeugenden der einen Schar drei enthält, welche senkrecht zu einander geneigt sind, so heifst es gleichseitig.

b) Der Asymptotenkegel eines gleichseitigen Hyperboloids ist selbst gleichseitig.

c) In jeder Geradenschar eines gleichseitigen Hyperboloids giebt es unendlich viele Tripel von Erzeugenden, welche senkrecht zu einander geneigt sind.

d) Damit das Hyperboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

gleichseitig ist, mufs sein $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2}$.

e) Jede Ebene, welche auf einer Erzeugenden eines gleichseitigen Hyperboloids senkrecht steht, schneidet die Fläche in einer gleichseitigen Hyperbel.

f) Sobald ein Hyperboloid von einer Ebene, welche auf einer seiner Erzeugenden senkrecht steht, in einer gleichseitigen Hyperbel geschnitten wird, ist dasselbe gleichseitig.

g) Soll die Gleichung $\alpha yz + \beta zx + \gamma xy + 1 = 0$ ein gleichseitiges Hyperboloid darstellen, so darf man die Koefficienten α, β, γ als positiv voraussetzen.

(Zunächst mufs das Produkt $\alpha\beta\gamma$ positiv sein; indem man die positive und negative Richtung der z-Axe vertauscht, ändern α und β ihr Zeichen.)

h) Wenn die Gleichungen $\alpha yz + \beta zx + \gamma xy + 1 = 0$ und $\alpha'\eta\zeta + \beta'\zeta\xi + \gamma'\xi\eta + 1 = 0$ für verschiedene rechtwinklige Systeme dieselbe Fläche darstellen, so mufs sein:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 \text{ und } \alpha\beta\gamma = \alpha'\beta'\gamma'.$$

i) Die Gleichung eines gleichseitigen Hyperboloids kann unter der Annahme, dafs a, b, c positive Gröfsen sind, immer in der Form dargestellt werden:

$$\frac{yz}{bc} + \frac{zx}{ca} + \frac{xy}{ab} + 1 = 0.$$

Der Fläche gehören die sechs geraden Linien an:

$y = b,\ z = -c;\ z = -c,\ x = a;\ x = a,\ y = -b;$

$y = -b,\ z = c;\ z = c,\ x = -a;\ x = -a,\ y = b.$

Diese bilden sechs zusammenhangende Kanten eines rechtwinkligen Parallelepipedons, dessen sechs andere Kanten nicht in der Fläche liegen. Die sechs Seitenflächen dieses Parallelepipedons sind Tangentialebenen an die Fläche; zwei seiner Eckpunkte liegen nicht in der Fläche, während in den sechs andern die Seitenflächen berühren.

(Die positiven Gröfsen a, b, c lassen sich nur auf eine Weise so bestimmen, dafs die hier vorausgesetzte Form mit der in g) angegebenen identisch wird.)

k) Auf der Fläche liegen unendlich viele Parallelepipeda von der in i) angegebenen Eigenschaft, indem man eine seiner Kanten beliebig unter ihren Erzeugenden wählen kann. Die Eckpunkte aller dieser Parallelepipeda liegen auf einer mit der Fläche konzentrischen Kugel und ihre Volumina sind gleich grofs.

(Aus den in h) angegebenen Gleichungen folgt, daſs auch die Werte $a^2 + b^2 + c^2$ und abc sich nicht ändern, wenn man verschiedene Koordinatensysteme benutzt, für welche die Gleichung die in c) angegebene Form erhält.)

13) Weitere Übungen im Anschluſs an 10) und 11) sowie an die im Anhange zu § 26 unter 11) (S. 242) gegebenen Sätze.

a) Die vier Höhen eines beliebigen Tetraeders sind vier Erzeugende der einen Schar eines gleichseitigen Hyperboloids, und die vier in den Höhenpunkten der Seitenflächen auf ihnen errichteten Senkrechten sind Erzeugende der andern Schar.

(Daſs die acht genannten Geraden einer Fläche zweiter Ordnung angehören, folgt unmittelbar aus jenen auf S. 242 angegebenen Sätzen, wenn man zur Vermittlung der reciproken Zuordnung den unendlichfernen Kugelkreis benutzt. Die Geraden gehören verschiedenen Scharen an, weil je zwei in einer Ebene liegen. Aus Üb. 2) zu I § 29 und dem soeben unter 11) f) angeführten Satze folgt, daſs das Hyperboloid gleichseitig ist.)

b) Drei beliebige Erzeugende eines gleichseitigen Hyperboloids können als Höhen eines Tetraeders angenommen werden. Nachdem man alsdann noch den Fuſspunkt der einen Höhe auf der entsprechenden Geraden willkürlich gewählt hat, ist das Tetraeder bestimmt.

c) Den Mittelpunkt desjenigen Hyperboloids zu finden, welches die vier Höhen eines gegebenen Tetraeders enthält.

d) Wenn man durch die Mitte irgend einer Kante des Tetraeders zur Gegenkante die senkrechte Ebene legt, so schneiden sich diese sechs Ebenen in einem Punkte, dem Mittelpunkte des durch die Höhen gehenden Hyperboloids.

e) Sollen zwei Höhen eines Tetraeders einander schneiden, so muſs die Kante, welche die zugehörigen Eckpunkte verbindet, zu ihrer Gegenkante normal geneigt sein; dann gehen auch die beiden andern Höhen durch einen Punkt.

f) Sobald zwei Kanten eines Tetraeders je zu ihren Gegenkanten senkrecht geneigt sind, gilt dasselbe auch von dem dritten Paare Gegenkanten, und die vier Höhen gehen durch denselben Punkt hindurch.

14) a) Im allgemeinen wird ein Kegel zweiter Ordnung nicht von drei Ebenen berührt, die auf einander senkrecht stehen;

sobald es ein einziges Tripel von Tangentialebenen des Kegels giebt, die auf einander senkrecht stehen, giebt es deren unendlich viele (orthogonaler Kegel).

(Ist die Gleichung der unendlichfernen Kurve des Kegels in Hesseschen Linienkoordinaten $\Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota u_\varkappa = 0$ ($\iota, \varkappa = 1, 2, 3$), so mufs nach I § 29 Üb. 2) sein $A_{11} + A_{22} + A_{33} = 0$, wofern die Kurve von den Seiten eines Polardreiecks des unendlichfernen Kreises $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ berührt wird.)

b) Wenn von einem Punkte zwei Tripel von Ebenen ausgehen, die auf einander senkrecht stehen, so läfst sich immer ein Kegel zweiter Klasse konstruieren, der von den sechs Ebenen berührt wird.

c) Der Schnittpunkt von irgend drei auf einander senkrecht stehenden Tangentialebenen einer Fläche zweiter Klasse ist entweder eine Kugel oder eine Ebene.

Wenn die Gleichung der Fläche ist $\alpha u_1^2 + \beta u_2^2 + \gamma u_3^2 = u_4^2$, so wird die Gleichung des vom Punkte (x, y, z) ausgehenden Tangentialkegels erhalten, indem man zu der gegebenen Gleichung die weitere Gleichung hinzunimmt: $u_1 x + u_2 y + u_3 z + u_4 = 0$. Demnach ist die Gleichung der unendlichfernen Kurve des Kegels

$$\alpha u_1^2 + \beta u_2^2 + \gamma u_3^2 - (u_1 x + u_2 y + u_3 z)^2 = 0.$$

Die Bedingung lautet demnach: $x^2 + y^2 + z^2 = \alpha + \beta + \gamma$.

Setzen wir aber die Gleichung der Fläche in der Form voraus: $\alpha u_1^2 + \beta u_2^2 + 2u_3 u_4 = 0$, so wird die Gleichung der unendlichfernen Kurve des Kegels:

$$\alpha u_1^2 + \beta u_2^2 - 2u_3 (u_1 x + u_2 y + u_3 z) = 0$$

und die Bedingung lautet: $\alpha + \beta - 2z = 0$.

d) Man übertrage den in c) angegebenen Satz auf den Fall, dafs die Fläche zweiter Klasse durch einen Kegelschnitt ersetzt wird.

(Für den Beweis setze man $\beta = 0$ in der vorhin gebrauchten Formel.)

§ 32.

Die Rotationsflächen zweiter Ordnung.

1. Diejenigen Flächen zweiter Ordnung, für welche zwei von null verschiedene Wurzeln der in den vorangehenden Paragraphen benutzten Gleichung $\Delta(\omega) = 0$ einander gleich sind, gehören zu

der wichtigen Klasse der Rotations- oder Umdrehungsflächen. Wenn eine Kurve sich um eine feste Gerade als Axe dreht, ohne ihre Gestalt und ihre Lage zur Geraden zu ändern, so beschreibt sie eine Fläche, welche als Umdrehungsfläche bezeichnet wird. Bei dieser Drehung beschreibt jeder Punkt der Kurve einen Kreis, dessen Ebene auf der Axe senkrecht steht; die Umdrehungsfläche wird somit von jeder zur Rotationsaxe senkrechten Ebene in Kreisen geschnitten. Zugleich wird jeder derartige Kreis und damit auch die Fläche bei der Drehung in sich verschoben. Daſs die beiden letzten Eigenschaften auf dasselbe hinauskommen, sieht man unmittelbar ein. Wenn aber umgekehrt eine Fläche von jeder, zu einer festen Geraden senkrechten Ebene in einem oder in mehreren Kreisen geschnitten wird, so ist sie eine Umdrehungsfläche, welche durch Umdrehung einer bestimmten ebenen Kurve erhalten wird, nämlich derjenigen Kurve, in welcher eine beliebige durch die feste Gerade gelegte Ebene die Fläche durchschneidet, wie daraus hervorgeht, daſs alle durch diese Gerade gelegten Ebenen aus der Fläche kongruente Kurven herausschneiden. Während es hiernach nur eine einzige, mit der Rotationsaxe in einer Ebene gelegene Linie giebt, durch deren Drehung eine vorgelegte Umdrehungsfläche entstehen kann, hat jeder beliebige auf einer solchen Fläche verlaufende Linienzug die Eigenschaft, daſs durch seine Umdrehung wenigstens ein Teil der Fläche erzeugt wird.

2. Hiernach läſst sich die Gleichung einer Umdrehungsfläche am einfachsten schreiben, wenn man unter Anwendung rechtwinkliger Koordinaten die Umdrehungsaxe mit einer Koordinatenaxe zusammenfallen läſst. Wird etwa die Drehung um die z-Axe ausgeführt und die Gleichung der Schnittlinie mit der yz-Ebene in der Form

$$x = \psi(z)$$

vorausgesetzt, so wird die Gleichung der Fläche:

$$(1) \quad x^2 + y^2 = \varphi(z),$$

falls $\varphi(z) = (\psi[z])^2$ angenommen wird.

In der That kommt eine beliebige Drehung um die z-Axe auf die Transformation hinaus:

$$x = \xi \cos\alpha - \eta \sin\alpha, \quad y = \xi \sin\alpha + \eta \cos\alpha, \quad z = \zeta.$$

Hierbei ändert sich aber die Gleichung (1) nicht; die Fläche

bleibt also bei einer jeden Drehung um die z-Axe in Deckung mit ihrer Anfangslage.

3. Gehen wir speciell zu den Rotationsflächen zweiter Ordnung über, so sehen wir, dafs in der Gleichung (1) $\varphi(z)$ eine ganze rationale Funktion zweiten Grades sein mufs, die in einer der beiden Formen $\alpha z^2 + \beta$ oder $2\alpha z$ vorausgesetzt werden darf. Demnach hat die beim Hauptaxenproblem auftretende Gleichung $\Delta(\omega) = 0$ zwei gleiche Wurzeln. Nun genügt allerdings eine einzige Bedingung zwischen den Koefficienten einer Gleichung, wenn zwei ihrer Wurzeln einander gleich werden sollen. In unserm Falle zieht aber, wie wir gesehen haben, die Gleichheit zweier Wurzeln noch weitere Besonderheiten nach sich. Dementsprechend hat die Gleichung $\Delta(\omega) = 0$ für die Fläche

$$(2) \quad \Sigma a_{ik} x_i x_k + 2\Sigma b_i x_i + c = 0$$

bei Anwendung rechtwinkliger Koordinaten x_1, x_2, x_3 nur dann gleiche Wurzeln, wenn ist:

$$(3) \quad a_{11} - \frac{a_{12}a_{13}}{a_{23}} = a_{22} - \frac{a_{21}a_{23}}{a_{31}} = a_{33} - \frac{a_{31}a_{32}}{a_{12}}.$$

Wofern einer der Koefficienten a_{23}, a_{31}, a_{12} gleich null wird, mufs mindestens noch ein zweiter verschwinden; für $a_{13} = a_{23} = 0$ tritt die weitere Bedingung hinzu:

$$(4) \quad (a_{11} - a_{33})(a_{22} - a_{33}) = a_{12}^2.$$

Endlich mufs für $a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0$ sein:

$$(5) \quad (a_{11} - a_{22})(a_{11} - a_{33})(a_{22} - a_{33}) = 0.$$

4. Statt diese Bedingungen, wie wir soeben gethan haben, aus den früheren Entwicklungen herüberzunehmen, können wir sie auch direkt begründen, indem wir andere Eigenschaften der Rotationsflächen zu Grunde legen. Soeben haben wir darauf hingewiesen, dafs die Aufgabe, die Axen zu finden, für jede Umdrehungsfläche unbestimmt wird. Dies Problem haben wir aber früher darauf zurückgeführt, Tripel von Richtungscosinus λ_1, λ_2, λ_3 zu bestimmen, welche den Gleichungen genügen:

$$(6) \quad \begin{aligned} (a_{11} - \omega)\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + a_{13}\lambda_3 &= 0 \\ a_{21}\lambda_1 + (a_{22} - \omega)\lambda_2 + a_{23}\lambda_3 &= 0 \\ a_{31}\lambda_1 + a_{32}\lambda_2 + (a_{33} - \omega)\lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

Hier mufs der Gröfse ω ein Wert beigelegt werden, welcher bewirkt, dafs eine der drei Gleichungen eine Folge der beiden andern wird; dann genügen diese beiden Gleichungen, um die

Verhältnisse $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$ zu finden. Soll das Problem unbestimmt werden, so müssen bei einem geeigneten Werte von ω die drei Gleichungen auf eine einzige hinauskommen. Jetzt müssen für geeignete Koefficienten ϱ und σ die Gleichungen bestehen:

$$\varrho\,(a_{11} - \omega) = a_{21},\ \varrho a_{12} = a_{22} - \omega,\ \varrho a_{13} = a_{23},$$
$$\sigma\,(a_{11} - \omega) = a_{31},\ \sigma a_{12} = a_{32},\ \sigma a_{13} = a_{33} - \omega.$$

Demnach muſs sein:

$$\omega = a_{11} - \frac{a_{21}}{\varrho} = a_{22} - \varrho a_{12} = a_{33} - \sigma a_{13}.$$

Indem man hierin für ϱ den Wert $a_{23} : a_{13}$ und für σ den Wert $a_{23} : a_{21}$ einsetzt, folgen wieder die Bedingungen (3).

Dabei haben wir allerdings vorausgesetzt, daſs keiner von den Koefficienten a_{12}, a_{23}, a_{31} verschwindet; der Ausnahmefall läſst sich aber wieder sehr einfach erledigen.

5. Die Betrachtung derjenigen Form, welche für die Gleichung der Rotationsflächen charakteristisch ist, führt ganz direkt zur Aufstellung der Bedingungsgleichungen. Wir nehmen an, die Gleichung (2) stelle eine Rotationsfläche dar; ein neues rechtwinkliges Koordinatensystem (y_1, y_2, y_3) sei so gewählt, daſs die Axe $y_1 = y_2 = 0$ zur Rotationsaxe der Fläche parallel ist. Dann muſs sein:

$$\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa = A\,(y_1^2 + y_2^2) + B y_3^2;$$

zugleich muſs aber auch, weil beide Systeme rechtwinklig sind, die Bedingung erfüllt sein:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2.$$

Demnach ist

$$(7)\quad \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa - A\,(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = (B - A)\,y_3^2,$$

oder die linke Seite dieser Gleichung stellt ein vollständiges Quadrat dar.

Nun haben wir im ersten Teile § 17 (I S. 105) gesehen, daſs eine homogene Funktion zweiten Grades von drei Variabeln nur dann ein Quadrat wird, wenn die sämtlichen Unterdeterminanten aus der Determinante der Form verschwinden. In unserm Falle müssen also die drei Gleichungen

$$(a_{11} - A)\,x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0$$
$$a_{21}x_1 + (a_{22} - A)\,x_2 + a_{23}x_3 = 0$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - A)\,x_3 = 0$$

auf eine einzige hinauskommen. Diese sind aber mit den Gleichungen (6) identisch, falls man λ_1, λ_2, λ_3 durch x_1, x_2, x_3 und ω durch A ersetzt.

Ebenso leicht ist es aber, aus der Gleichung (7) direkt weitere Folgerungen zu ziehen. Wir schreiben der Kürze wegen ϱ statt B — A und setzen

$$y_3 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3.$$

Dann ergeben sich durch Vergleichung der Koefficienten von x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_2x_3, x_3x_1, x_1x_2 die Gleichungen:

$$(8)\quad \begin{array}{ll} a_{11} - A = \varrho\alpha_1^2 & a_{23} = \varrho\alpha_2\alpha_3 \\ a_{22} - A = \varrho\alpha_2^2 & a_{31} = \varrho\alpha_3\alpha_1 \\ a_{33} - A = \varrho\alpha_3^2 & a_{12} = \varrho\alpha_1\alpha_2. \end{array}$$

Aus den drei letzten Gleichungen folgt:

$$\varrho\alpha_1^2 = \frac{a_{12}a_{13}}{a_{23}},\ \varrho\alpha_2^2 = \frac{a_{23}a_{21}}{a_{31}},\ \varrho\alpha_3^2 = \frac{a_{31}a_{32}}{a_{12}},$$

und indem man diese Werte in die drei ersten Gleichungen einsetzt, ergeben sich wieder die früher gefundenen Bedingungen.

Wie wir in § 25 des ersten Teiles (I S. 166) gesehen haben, sagt die Gleichung (7) aus, dafs die beiden unendlichfernen Kurven $\Sigma a_{ik}x_ix_k = 0$ und $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ sich in den beiden Punkten der Geraden $y_3 = 0$ berühren. Wir dürfen daher sagen, jede Rotationsfläche zweiter Ordnung gehe mit dem unendlichfernen Kugelkreise eine doppelte Berührung ein.

6. Wir können die Bedingungsgleichungen für die Rotationsfläche auch aus der Eigenschaft herleiten, dafs sie von jeder zur Rotationsaxe senkrechten Ebene in einem Kreise geschnitten wird. Nun giebt es stets einen Kreis, der durch zwei feste Punkte geht, und dessen Mittelpunkt in einer vorgeschriebenen Geraden liegt, wofern diese mit der Verbindungslinie der beiden Punkte, ohne zu ihr parallel zu sein, in einer Ebene liegt. Daraus folgt, dafs sich durch zwei Kreise, welche in parallelen Ebenen so liegen, dafs die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte auf den Ebenen senkrecht steht, eine Kugel legen läfst. Somit geht durch zwei parallele Kreise einer Rotationsfläche eine Kugel, deren Mittelpunkt in der Rotationsaxe liegt. Dem Büschel, welcher durch die gegebene Fläche und eine solche Kugel bestimmt wird, gehört auch das Paar der parallelen Ebenen an. Aus dieser Eigenschaft wollen wir die Bedingungsgleichungen herleiten.

Zu dem Ende legen wir die Gleichung der Fläche wieder in der Form (2) zu Grunde, schreiben sie auch kurz $F = 0$; die Gleichung der Kugel wollen wir kurz $K = 0$, ausführlich

$$(x_1 - e_1)^2 + (x_2 - e_2)^2 + (x_3 - e_3)^2 - r^2 = 0$$

schreiben; endlich sollen α_1, α_2, α_3 die Richtungscosinus der zu den Ebenen errichteten Senkrechten und m und n die Abstände dieser Ebenen vom Anfangspunkte der Koordinaten sein. Alsdann müssen sich zwei Koefficienten ω und ϱ so bestimmen lassen, dafs ist:

$$F - \omega K = \varrho\,(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + m)\,(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + n).$$

Damit hier die Glieder zweiten Grades beiderseits übereinstimmen, mufs sein:

$$\Sigma a_{ix}\, x_i\, x_x - \omega\,(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = \varrho\,(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)^2.$$

Das ist wieder die Gleichung (7); wir werden daher auch hier auf die früheren Bedingungsgleichungen geführt.

Hierzu treten die folgenden Gleichungen:

$$(9)\quad \begin{aligned} 2b_1 - 2\omega e_1 &= \varrho\alpha_1\,(m+n)\\ 2b_2 - 2\omega e_2 &= \varrho\alpha_2\,(m+n)\\ 2b_3 - 2\omega e_3 &= \varrho\alpha_3\,(m+n)\\ c - \omega\,(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 - r^2) &= \varrho mn. \end{aligned}$$

Vermittelst dieser Gleichungen können wir die unbekannten Gröfsen e_1, e_2, e_3 und r^2 berechnen.

7. Die zuletzt durchgeführte Untersuchung stützt sich auf die Annahme, dafs es eine Kugel giebt, von der die Fläche in zwei parallelen Kreisen geschnitten wird, oder mit andern Worten, dafs die Fläche zwei parallele Kreise enthält, deren Mittelpunkte durch eine zu ihren Ebenen senkrechte Gerade verbunden werden. Demnach können wir sagen:

Sobald eine Fläche zweiter Ordnung von irgend zwei parallelen Ebenen in Kreisen geschnitten wird, deren Mittelpunkte in einer zu den Ebenen senkrechten Geraden liegen, ist sie eine Umdrehungsfläche, deren Rotationsaxe mit dieser Geraden zusammenfällt. Dann schneidet jede um einen Punkt dieser Axe beschriebene Kugel die Kugel in zwei Kreisen, deren Ebenen auf der Axe senkrecht stehen.

8. Wenn zwei Flächen zweiter Klasse sich in zwei Punkten berühren, so gehört der durch sie bestimmten Schar ein Punkte-

paar an. Demnach enthält auch diejenige Flächenschar, welche durch Zusammenstellung einer Rotationsfläche zweiter Klasse mit dem unendlichfernen Kugelkreise erhalten wird, ein Punktepaar. Sind daher M und N zwei lineare Ausdrücke in $u_1 \ldots u_4$, so läfst sich die Gleichung einer Rotationsfläche zweiter Ordnung in Hesseschen Koordinaten auf die Form bringen:

$$(10) \quad \Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota u_\varkappa = \varrho (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) + \sigma MN.$$

Wir wollen indessen nicht darauf eingehen, hieraus die Bedingungen herzuleiten, denen die Koefficienten $A_{\iota\varkappa}$ auf der linken Seite dieser Gleichung genügen müssen. Für unsern Zweck ist es hinreichend, folgendes zu beachten. Ein Punktepaar kann, falls seine Punkte im Endlichen liegen, vermittelst Hessescher Koordinaten in der Form dargestellt werden: $Au_3^2 + Bu_4^2 = 0$; demnach kann man in dem entsprechenden Falle die Gleichung der Rotationsfläche in der Gestalt voraussetzen:

$$(11) \quad u_1^2 + u_2^2 + au_3^2 + bu_4^2 = 0.$$

Wenn aber der eine Punkt im Unendlichfernen liegt, so kann man der Gleichung des Paares die Form geben: $u_3 u_4 = 0$; demnach erhält man für die Fläche die Gleichung:

$$(12) \quad u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + 2au_3 u_4 = 0,$$

oder, wenn man lieber will:

$$(13) \quad u_1^2 + u_2^2 + 2au_3 u_4 = 0.$$

Umgekehrt kann man aber auch von den Punkt- zu Ebenenkoordinaten übergehen, dadurch ebenfalls die Gleichungen (11) bis (13) herleiten und jetzt aus diesen Formen unmittelbar ersehen:

1) dafs die aus einer Umdrehungsfläche zweiter Ordnung und dem unendlichfernen Kugelkreise gebildete Schar ein Punktepaar enthält, und

2) dafs jede solche Fläche mit dem unendlichfernen Kugelkreise eine doppelte Berührung eingeht.

Die erste dieser beiden Eigenschaften läfst auch folgenden Ausspruch zu:

Alle von den Punkten des unendlichfernen Kugelkreises an eine Rotationsfläche zweiter Ordnung gelegten Tangentialebenen gehen durch zwei feste Punkte.

Die Punkte dieses Paares heifsen die Brennpunkte der Rotationsfläche; man sieht sehr leicht, dafs sie auf der Axe liegen

und auch Brennpunkte für denjenigen Kegelschnitt sind, durch dessen Umdrehung die Fläche entsteht.

9. Die soeben gefundene Flächenschar führt uns auf eine weitere wichtige Eigenschaft der Rotationsflächen zweiter Ordnung. Wir benutzen zu dem Zwecke den Satz, dafs zwei Ebenen, welche konjugierte Polarebenen für irgend zwei Flächen einer Flächenschar zweiter Klasse sind, auch einander in gleicher Weise für jede Fläche der Schar zugeordnet sind. Irgend einer Ebene sind in Bezug auf ein Punktepaar alle durch einen festen Punkt ihrer Verbindungslinie gehenden Ebenen und in Bezug auf den unendlichfernen Kugelkreis die auf ihr senkrecht stehenden Ebenen zugeordnet. Jetzt möge die Ebene A die Rotationsaxe im Punkte α schneiden; dieser Punkt liege harmonisch zum Punkte β in Bezug auf die Brennpunkte; dann sind alle durch β zur Ebene A senkrecht gelegten Ebenen konjugierte Polarebenen zu jeder ihrer Schar angehörenden Flächen und damit auch zu der gegebenen Rotationsfläche. Alle diese Ebenen und mit ihnen die von β auf A gefällte Senkrechte müssen daher durch den Pol der Ebene A in Bezug auf die Rotationsfläche gehen, oder die vom Pole auf die Ebene gefällte Senkrechte trifft die Rotationsaxe im Punkte β. Die Senkrechte, welche von irgend einem Punkte auf seine Polarebene gefällt wird, geht durch die Rotationsaxe.

Übungen:

1) a) Indem wir in den folgenden Gleichungen stets $a > c$ voraussetzen und die in § 31 gegebene Einteilung zu Grunde legen, erhalten wir folgende Arten von Umdrehungsflächen zweiter Ordnung:

$$\text{I A) a) } \alpha) \quad \frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$

$$\text{a) } \beta) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2+z^2}{c^2} + 1 = 0$$

$$\text{b) } \alpha) \quad \frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\text{b) } \beta) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2+z^2}{c^2} = 1$$

$$\text{c)} \quad \frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$$

d) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1.$

I B) a) α) $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$

a) β) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 0$

I B) b) $\frac{x^2 + y^2}{a^2} = \frac{z^2}{b^2}.$

II A) a) $x^2 + y^2 = 2az.$

II B) a) $x^2 + y^2 + a^2 = 0$

b) $x^2 + y^2 = a^2.$

II C) $x^2 + y^2 = 0.$

b) Das hyperbolische Paraboloid und der hyperbolische Cylinder können nicht durch Umdrehung entstehen.

c) Über die Entstehung der in a) angegebenen reellen Arten gilt folgendes:

I A) b) α) das abgeplattete Ellipsoid, entstanden durch Drehung einer Ellipse um die kleine Axe.

I A) b) β) das verlängerte Ellipsoid, entstanden durch Drehung einer Ellipse um die grofse Axe.

I A) c) das einschalige Umdrehungs-Hyperboloid, entstanden durch Drehung einer Hyperbel um die imaginäre Axe.

I A) d) das zweischalige Umdrehungs-Hyperboloid, entstanden durch Drehung einer Hyperbel um die reelle Axe.

I B) b) der reelle Kreiskegel, entstanden durch Drehung eines Winkels um den einen Schenkel.

II A) a) das Rotations-Paraboloid, entstanden durch Drehung einer Parabel um die Axe.

II B) b) der Rotationscylinder, entstanden durch Drehung einer Geraden um eine parallele Axe.

2) Man untersuche folgende Flächen:

a) $yz + zx + xy - 5x - 4y - 3z + 12 = 0.$

b) $x^2 + y^2 + z^2 + 2k(xy + xz + yz) = a^2.$

c) $(x + 1)^2 + (2y + 3z)^2 + 3x - z = 0.$

3) a) Man übertrage die für die Brennpunkte eines Kegelschnittes geltenden Sätze auf die Umdrehungsflächen zweiter Ordnung.

b) Für welche unter den in Üb. 1) angegebenen Flächen sind die Brennpunkte reell, für welche imaginär?

4) Man verifiziere den in 9. bewiesenen Satz unter Anwendung von Punktkoordinaten.

5) Man verifiziere die in 7. aufgestellte Behauptung vermittelst der in 6. angegebenen Gleichungen.

6) a) Wenn sich eine gerade Linie um eine zu ihr windschiefe Gerade als Axe dreht, so beschreibt sie ein einschaliges Rotations-Hyperboloid.

b) Man gebe alle geraden Linien an, welche auf einem gegebenen Rotations-Hyperboloid liegen.

c) Bei der Umdrehung einer solchen Fläche kommt jede Gerade in Deckung mit den zur selben Schar gehörenden Geraden.

7) a) Auf jedem Durchmesser einer Kugel wird durch den Schnitt mit einer Ebene und ihren Pol eine Involution erzeugt; diese ist hyperbolisch, wenn der Radius reell, elliptisch, wenn der Radius imaginär ist. Eine Kugel mit dem Radius null ordnet jedem Durchmesser die im Mittelpunkte auf ihm senkrecht stehende Ebene zu.

b) Auf der Umdrehungsaxe einer Rotationsfläche zweiter Ordnung wird durch eine beliebige Ebene und den Schnittpunkt der vom Pole auf die Ebene gefällten Senkrechten eine Involution erzeugt, deren Hauptpunkte die Brennpunkte der Fläche sind.

8) Durch jede kubische Raumkurve läfst sich im allgemeinen eine einzige Rotationsfläche zweiter Ordnung legen.

Durch die drei Schnittpunkte der Kurve mit der unendlichfernen Ebene läfst sich ein einziger Kegelschnitt legen, der mit dem unendlichfernen Kugelkreise eine doppelte Berührung eingeht. Es ist aber möglich, durch diesen Kegelschnitt und die gegebene Kurve eine Fläche zweiter Ordnung zu legen.

Um die erste Behauptung zu erhärten, denken wir die Koordinaten eines jeden der drei Punkte je mit einem solchen Faktor multipliziert, dafs

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = x_1''^2 \ldots = x_1'''^2 + \ldots = \pm p^2$$

wird. Ist jetzt $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ die Verbindungslinie der gemeinsamen Berührungspunkte, so mufs sein

$$\alpha_1 x_1' + \alpha_2 x_2' + \alpha_3 x_3' = p$$

. . . . .

9) a) Man soll durch Auflösung einer quadratischen Gleichung die Gleichung einer gegebenen Umdrehung zweiter Ordnung auf die Form bringen:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=\varepsilon(\lambda x+\mu y+\nu z+e)^2.$$

b) Welcher Satz ergiebt sich aus dieser Gleichungsform?

10) a) Dreht sich eine mit einer ihrer Normalen fest verbundene Ebene so, dafs der Fufspunkt der Senkrechten in einer festen Ebene bleibt und die Gerade fortwährend durch einen festen Punkt geht, so umhüllt sie ein Rotations-Paraboloid.

(Die Gleichung einer solchen Fläche kann in der Form $u_3u_4=a$ geschrieben werden.)

b) Das Produkt der von den Brennpunkten auf eine Tangentialebene einer Umdrehungsfläche zweiter Ordnung gefällten Senkrechten ist eine konstante Gröfse.

(Die Gleichung darf in der Form vorausgesetzt werden: $MN=\pm q^2$, wo M und N lineare Formen in $u_1 \ldots u_4$ sind.)

11) Indem man den einen Brennpunkt einer Umdrehungsfläche zweiter Ordnung in den Anfangspunkt der Koordinaten legt und dann

$$u=\frac{u_1}{u_4},\quad v=\frac{u_2}{u_4},\quad w=\frac{u_3}{u_4}$$

setzt, kann man die in 10) b) angegebene Gleichung auf die Form bringen:

$$(u-a)^2+(v-b)^2+(w-c)^2=r^2.$$

Demnach entspricht jedem Satze über die Kugel ein solcher über Rotationsflächen mit einem festen Brennpunkte. Unter anderm gelten folgende Sätze:

a) Sobald eine Flächenschar zweiter Klasse zwei Rotationsflächen mit einem gemeinsamen Brennpunkte enthält, sind alle ihre Flächen Rotationsflächen mit demselben Brennpunkte, oder mit andern Worten,

Alle Flächen zweiter Ordnung, welche von den sämtlichen, zweien Rotationsflächen zweiter Ordnung mit demselben Brennpunkte gemeinschaftlichen Tangentialebenen berührt werden, sind wieder Rotationsflächen mit demselben Brennpunkte.

(Der durch zwei Kugeln bestimmte Flächenbüschel enthält nur Kugeln.)

b) Die Spitzen der sechs Kegel, welche je zwei von vier Rotationsflächen zweiter Ordnung mit demselben Brennpunkte ringsum berühren, liegen in einer Ebene.

(Die sechs Ebenen, in denen sich vier Kugeln paarweise schneiden, gehen durch einen und denselben Punkt.)

§ 33.

Die Kreisschnitte einer Fläche zweiter Ordnung.

1. Eine Kugel wird von jeder Ebene in einem Kreise geschnitten, und durch jeden Kreis lassen sich unendlich viele Kugeln legen. Daher haben alle in einer bestimmten Ebene gelegenen Kreise dieselben Punkte mit ihrer unendlichfernen Geraden gemein; sie besitzen dieselben unendlichfernen Kreispunkte, und das sind die Schnittpunkte der Ebene mit dem unendlichfernen Kugelkreise. Umgekehrt ist jede Kurve zweiter Ordnung, welche durch die beiden unendlichfernen imaginären Kreispunkte ihrer Ebene geht, ohne die unendlichferne Gerade der Ebene ganz zu enthalten, ein Kreis. Jede Ebene, deren Schnittkurve mit einer Fläche zweiter Ordnung, ohne die unendlichferne Gerade ganz zu enthalten, durch die Schnittpunkte der Ebene mit dem unendlichfernen Kugelkreise hindurchgeht, schneidet die Fläche in einem Kreise; sie ist ein Kreisschnitt. Wenn wir daher die auf einer Fläche zweiter Ordnung enthaltenen Kreise finden wollen, so müssen wir durch zwei Schnittpunkte ihrer unendlichfernen Linie mit dem unendlichfernen Kugelkreise eine Ebene legen; wofern ihre Schnittlinie nicht die unendlichferne Gerade ganz enthält, ist sie ein Kreis.

2. Hiernach ist es leicht, alle Kreisschnitte einer vorgelegten Fläche zweiter Ordnung zu finden. Bei dieser Untersuchung dürfen wir die Kugeln und die Umdrehungsflächen ausschliefsen; wir dürfen daher, indem wir die Gleichung der Fläche in der Form

$$(1)\quad \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + 2\varkappa x + 2\lambda y + 2\mu z + \nu = 0$$

voraussetzen, die Annahme machen, dafs die drei Koefficienten α, β, γ ungleich sind. Die unendlichferne Kurve der Fläche hat die Gleichung:

$$(2)\quad \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 0.$$

Diese hat mit dem unendlichfernen Kugelkreise vier Punkte gemeinschaftlich, durch welche sich drei Geradenpaare legen lassen, nämlich:

$$(4)\quad \begin{aligned} (\beta-\alpha)\,y^2+(\gamma-\alpha)\,z^2&=0\\ (\alpha-\beta)\,x^2+(\gamma-\beta)\,z^2&=0\\ (\alpha-\gamma)\,x^2+(\beta-\gamma)\,y^2&=0. \end{aligned}$$

Jede Gerade, welche einem dieser drei Paare angehört, enthält zwei Punkte, welche die Fläche mit dem unendlichfernen Kugelkreis gemein hat. Sobald sie also nicht ganz der Fläche angehört, schneidet jede durch sie hindurchgelegte Ebene die Fläche in einem Kreise. Wofern demnach die Fläche keine unendlichferne gerade Linie enthält, giebt es im Unendlichfernen sechs gerade Linien von der Beschaffenheit, dafs jede durch eine von ihnen gehende Ebene in einem Kreise schneidet.

3. Zwei Ebenen, welche durch dieselbe unendlichferne Gerade gehen, sind einander parallel. Wir dürfen daher den soeben gefundenen Satz durch den folgenden ersetzen:

Wofern eine Fläche zweiter Ordnung keine unendlichferne Gerade enthält, giebt es sechs verschiedene, reelle oder imaginäre Stellungen von der Eigenschaft, dafs alle einer von ihnen entsprechenden Ebenen Kreisschnitte der Fläche sind.

Speciell gilt der Satz:

Wenn eine Ebene die Fläche zweiter Ordnung in einem Kreise schneidet, so hat jede zu ihr parallele Ebene einen Kreis mit ihr gemeinschaftlich.

4. Das unendlichferne Geradenpaar

$$(\beta-\alpha)\,y^2+(\gamma-\alpha)\,z^2=0$$

hat den unendlichfernen Punkt $y=z=0$ zum singulären Punkte und ihre beiden Ebenen sind zu den unendlichfernen Geraden $y=0$ und $z=0$ gleich geneigt. Legen wir also durch einen beliebigen Punkt des Raumes die Ebenen durch je eine dieser Geraden, so schneiden sich diese Ebenen in einer zur x-Axe parallalen Geraden so, dafs ihr Winkel durch zwei Ebenen halbiert wird, von denen die eine zur xy-, die andere zur xz-Ebene parallel ist.

Überhaupt schneiden sich zwei zusammengehörige Kreischnittebenen in einer Geraden, welche zu einer Axe der Fläche parallel

ist, und die Winkel, welche zwei solche Ebenen mit einander bilden, werden durch Ebenen halbiert, die zu Hauptebenen der Fläche parallel sind.

5. Wir haben aber noch zu untersuchen, ob die Ebenen der Kreisschnitte oder, was auf dasselbe hinauskommt, ihre unendlichfernen Linien reell sind. Nun wird offenbar ein reelles Geradenpaar der unendlichfernen Ebene nur dann durch die Gleichung $Ax^2 + By^2 = 0$ dargestellt, wenn A und B verschiedenes Vorzeichen haben. Hiernach kann auch nur eines der drei Geradenpaare (4) reell sein. Ist nämlich etwa $\alpha < \beta < \gamma$, so sind $\beta - \alpha$ und $\gamma - \alpha$ positiv, $\alpha - \gamma$ und $\beta - \gamma$ negativ; dagegen ist $\alpha - \beta$ negativ und $\gamma - \beta$ positiv. Eine Fläche zweiter Ordnung hat somit höchstens zwei reelle Scharen von Kreisschnitten.

6. Um unsere Untersuchung zum Abschluſs zu bringen, haben wir noch den Fall zu untersuchen, daſs unter den Geraden, welche einem der Paare (4) angehören, sich eine befindet, die ganz in der Fläche liegt. Soll dieser Fall eintreten, so muſs einer der Koefficienten α, β, γ verschwinden. Umgekehrt, wenn diese Bedingung erfüllt ist, so hat die Fläche zwei unendlichferne Gerade; demnach liefern alsdann nicht mehr sechs, sondern nur vier verschiedene Stellungen Ebenen, von denen die Fläche in einem Kreise geschnitten wird. Sollen gerade die reellen Kreisschnitte ausfallen, so muſs die Fläche auch mit der unendlichfernen Geraden reelle Gerade gemeinschaftlich haben. Alsdann liegt der verschwindende Koefficient der Gleichung (2) zwischen den beiden andern; von den letzteren hat der eine das positive, der andere das negative Vorzeichen.

Alle eigentlichen Flächen zweiter Ordnung mit Ausnahme des hyperbolischen Paraboloids haben zwei Scharen von reellen Kreisschnitten; auch auf dem Kegel zweiter Ordnung und dem elliptischen Cylinder liegen zwei Scharen von reellen Kreisen. Dagegen enthält weder das hyperbolische Paraboloid noch der hyperbolische oder parabolische Cylinder reelle Kreise.

7. Wir wollen die reellen Kreisschnitte der einzelnen Flächen angeben, beschränken uns aber dabei auf reelle Flächen. Wenn die Gleichung des Ellipsoids in der Form vorausgesetzt wird:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (a>b>c),$$

so sind die Ebenen der Kreisschnitte bei beliebigem Werte von m:

$$\frac{x}{a}\sqrt{a^2-b^2}=\pm\frac{z}{c}\sqrt{b^2-c^2}+m.$$

Für das einschalige Hyperboloid:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (a>b)$$

ist

$$-\frac{1}{c^2}<\frac{1}{a^2}<\frac{1}{b^2};$$

daher sind die Ebenen der Kreisschnitte:

$$\frac{y}{b}\sqrt{a^2-b^2}=\pm\frac{z}{c}\sqrt{a^2+c^2}+m.$$

Durch diese Gleichung kann man die Ebenen der Kreisschnitte auch für den reellen Kegel darstellen.

Das zweischalige Hyperboloid

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

wird von den Ebenen

$$\frac{x}{a}\sqrt{a^2+b^2}=\pm\frac{z}{c}\sqrt{b^2-c^2}+m$$

in Kreisen geschnitten.

Da für das elliptische Paraboloid

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2\frac{z}{c} \qquad (a>b)$$

ist

$$0<\frac{1}{a^2}<\frac{1}{b^2},$$

so sind die Ebenen der Kreisschnitte

$$z=\pm\frac{y}{b}\sqrt{a^2-b^2}+m.$$

Diese Ebenen schneiden auch den elliptischen Cylinder

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

in Kreisen.

8. Es dürfte angemessen sein, die Kreisschnitte auch ohne Benutzung des imaginären unendlichfernen Kugelkreises herzuleiten. Wir gehen zu dem Zwecke von einem in der Fläche

$\Phi = 0$ gelegenen Kreise aus und legen durch ihn eine Kugel $K = 0$. Da diese beiden Flächen eine ebene Kurve gemein haben, müssen sie sich noch in einer zweiten ebenen Kurve schneiden. Daher zerfällt der Schnitt der gegebenen Fläche mit der Kugel in zwei ebene Kurven, oder dem durch die beiden Flächen bestimmten Büschel gehört ein Ebenenpaar an. Man kann demnach einen Koefficienten ω so bestimmen, dafs die Gleichung

$$(5) \quad \Phi - \omega K = AB$$

identisch befriedigt wird, wo A und B lineare Funktionen von x, y, z sind. Die Gleichung der Fläche legen wir wieder in der Form (1), die der Kugel in der Form

$$(6) \quad x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + e = 0$$

zu Grunde.

Um die Beziehungen kennen zu lernen, welche zwischen den Koefficienten der Gleichungen (1) und (6) bestehen müssen, damit die Relation (5) identisch erfüllt wird, können wir in doppelter Weise vorangehen. Wir können die Determinante

$$(7) \quad \begin{vmatrix} \alpha - \omega & 0 & 0 & \varkappa - a\omega \\ 0 & \beta - \omega & 0 & \lambda - b\omega \\ 0 & 0 & \gamma - \omega & \mu - c\omega \\ \varkappa - a\omega & \lambda - b\omega & \mu - c\omega & \nu - e\omega \end{vmatrix}$$

aus den Koefficienten der linken Seite betrachten und die Bedingungen aufsuchen, unter denen alle ihr angehörenden dreireihigen Unterdeterminanten verschwinden.

Damit die aus den drei ersten Zeilen und Kolonnen gebildete Determinante null wird, mufs sein:

$$(\alpha - \omega)(\beta - \omega)(\gamma - \omega) = 0.$$

Indem wir wieder von dem Falle absehen, dafs zwei der Koefficienten α, β, γ einander gleich sind, und etwa $\omega = \alpha$ wählen, erkennen wir sofort, dafs die angegebenen Unterdeterminanten sämtlich gleich null sind, sobald noch $\varkappa = a\alpha$ und

$$(8) \quad \begin{vmatrix} \beta - \alpha & 0 & \lambda - b\alpha \\ 0 & \gamma - \alpha & \mu - c\alpha \\ \lambda - b\alpha & \mu - c\alpha & \nu - e\alpha \end{vmatrix} = 0$$

ist.

Auf der linken Seite der Gleichung (5) stehen jetzt als quadratische Glieder nur

$$(\beta - \alpha) y^2 + (\gamma - \alpha) z^2.$$

Demnach muſs das Ebenenpaar auf der rechten Seite die Form haben:

$$(y\sqrt{\beta-\alpha}+z\sqrt{\alpha-\gamma}+m)(y\sqrt{\beta-\alpha}-z\sqrt{\alpha-\gamma}+n)=0.$$

Hier dürfen wir m und n als gegeben betrachten und können dann die Koefficienten a, b, c, e berechnen.

In gleicher Weise können wir auch die beiden Koefficienten β und γ der Gleichung (1) benutzen; nur müssen wir von vornherein den Wert $\omega = 0$ ausschlieſsen, da dieser die gegebene Fläche selbst und nicht das gesuchte Ebenenpaar liefert.

9. Wir können aber auch zunächst die Bedingungen aufsuchen, welche zwischen den Koefficienten der beiden Ebenen $A = 0$ und $B = 0$ bestehen müssen, damit die Gleichung (5) befriedigt wird. Es sei

$$A = mx + ny + pz + q$$
$$B = m'x + n'y + p'z + q'.$$

Dann müssen die Gleichungen bestehen:

$$mm' = \alpha - \omega \qquad np' + n'p = 0$$
$$nn' = \beta - \omega \qquad pm' + p'm = 0$$
$$pp' = \gamma - \omega \qquad mn' + m'n = 0.$$

Damit die drei letzten Gleichungen mit einander vereinbar sind, muſs die Gleichung erfüllt sein:

$$\begin{vmatrix} o & p & n \\ p & o & m \\ n & m & o \end{vmatrix} = 2\,mnp = 0.$$

Für $m = 0$ muſs aber $\omega = \alpha$, also wegen unserer Annahme n, p, n', p' von null verschieden sein. Somit ist auch $m' = 0$, und wir dürfen

$$n = n' = \sqrt{\beta-\alpha},\quad p = -p' = \sqrt{\alpha-\gamma}$$

setzen. Dadurch sind wir wieder zu den früheren Gleichungen gelangt.

10. Die Mittelpunkte der Kurven, in denen eine Fläche zweiter Ordnung von parallelen Ebenen geschnitten wird, liegen in einem Durchmesser, für den die konjugierte Durchmesserebene zu den gegebenen Schnittebenen parallel ist. Somit liegen auch die Mittelpunkte paralleler Kreise in einem Durchmesser. Wenn die Fläche die Gleichung hat

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1,$$

und die Gleichung eines Kreisschnittes ist

$$y\sqrt{\beta - \alpha} + z\sqrt{\alpha - \gamma} = m,$$

so verhalten sich die Koordinaten x, y, z des konjugierten Durchmessers wie

$$0 : \sqrt{\frac{\beta - \alpha}{\beta}} : \sqrt{\frac{\alpha - \gamma}{\gamma}}.$$

Ebenso hat der durch die Ebene

$$z + y\sqrt{\frac{\beta - \alpha}{\alpha}} = m$$

aus dem Paraboloid

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + 2z = 0$$

ausgeschnittene Kreis in einem Punkte des Durchmessers $x = 0$, $y = \frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{\beta - \alpha}{\alpha}}$ seinen Mittelpunkt.

11. Die Tangentialebene im Schnittpunkte eines Durchmessers mit der Fläche ist zur konjugierten Durchmesserebene parallel, und die Linie, welche sie mit der Fläche gemeinschaftlich hat, mufs als eine zu den Schnittlinien der parallelen Ebenen ähnliche Kurve betrachtet werden. Legt man daher im Schnittpunkte eines Durchmessers, welcher durch die Mittelpunkte von Kreisschnitten hindurchgeht, die parallele Ebene zu den Ebenen dieser Kreise, so berührt sie die Fläche in der Weise, dafs die gemeinsame Linie als Kreis mit dem Radius null aufgefafst werden kann. Die Punkte, deren Tangentialebenen mit einer Fläche einen unendlichkleinen Kreis gemein haben, heifsen Kreispunkte oder Nabelpunkte der Fläche. Für die Flächen zweiter Ordnung gilt hiernach der Satz, dafs jede zur Tangentialebene in einem Kreispunkte parallele Ebene ein Kreisschnitt der Fläche ist, und dafs der zu einem Kreispunkte führende Durchmesser durch die Mittelpunkte dieser Kreise hindurchgeht.

Eine geradlinige Fläche zweiter Ordnung kann keine Kreispunkte enthalten, weil sie von jeder Berührungsebene in reellen geraden Linien geschnitten wird. Ebenso wenig kann man bei Kegeln und Cylindern von Kreispunkten sprechen. Dagegen liegen auf einer jeden ungeradlinigen eigentlichen Fläche zweiter Ordnung zwei oder vier Kreispunkte, deren Tangentialebenen für die derselben Schar angehörenden Kreisschnitte den Übergang von

einem reellen zu einem imaginären Radius vermitteln. Die Koordinaten der Kreispunkte für das auf die Axen bezogene Ellipsoid sind:

$$x = \pm a\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}},\quad y = 0,\quad z = \pm c\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}};$$

in entsprechender Weise haben die des zweischaligen Hyperboloids die Koordinaten:

$$x = \pm a\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2 + c^2}},\quad y = 0,\quad z = \pm c\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 + c^2}},$$

und die des elliptischen Paraboloids:

$$x = 0,\quad y = \pm\frac{b}{c}\sqrt{a^2 - b^2},\quad z = \frac{1}{2}\frac{a^2 - b^2}{c}.$$

Übungen:

1) Welcher Axe sind die sämtlichen reellen Kreisschnitte parallel

a) beim Ellipsoid,

b) beim einschaligen Hyperboloid,

c) beim zweischaligen Hyperboloid,

d) beim elliptischen Paraboloid,

e) beim elliptischen Cylinder?

(Für das zweischalige Hyperboloid wähle man eine auf der reellen Axe senkrechte Ebene, welche aus der Fläche eine reelle Ellipse ausschneidet.)

2) Man gebe diejenigen Kreisschnitte des Ellipsoids und der beiden Hyperboloide an, welche durch den Mittelpunkt gehen. Wie grofs sind die Radien der ausgeschnittenen Kreise?

3) a) Durch zwei beliebige nicht parallele Kreise einer Fläche zweiter Ordnung läfst sich eine Kugel legen.

b) Wo liegen die Mittelpunkte aller dieser Kugeln?

c) Warum läfst sich nur durch parallele Kreise einer Rotationsfläche eine Kugel legen?

4) a) Wenn ein Flächenbüschel eine Kugel enthält, so haben alle ihre Flächen die Ebenen der Kreisschnitte gemeinschaftlich.

b) Gilt diese Behauptung nur für die reellen Kreisschnitte?

5) Für eine gegebene Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung läfst sich immer ein Koordinatensystem bestimmen, in welchem

die x- und die y-Axe auf einander senkrecht stehen und bei dessen Benutzung die Gleichung der Fläche die Gestalt annimmt:

$$\alpha(x^2 + y^2) + \beta z^2 = 1.$$

6) a) Eine Ebene, welche die eine von zwei einander ringsum berührenden Flächen zweiter Ordnung in einem Kreispunkte tangiert, schneidet die andere in einer Kurve, welche diesen Punkt zum Brennpunkte hat.

(Die eine Fläche möge die Gleichung $F = 0$, die andere die Gleichung $F - \varkappa L^2 = 0$ haben, wo L eine lineare Funktion ist. Wenn $A = 0$ die gegebene Ebene ist, so stellt die Verbindung der Gleichungen $A = 0$, $F = 0$ einen unendlich kleinen Kreis, also die Verbindung der Gleichungen $A = 0$, $F - \varkappa L^2 = 0$ einen Kegelschnitt dar, der den Mittelpunkt des Kreises zum Brennpunkte hat. Auch läfst sich der Beweis rein begrifflich führen.)

b) Wenn eine Kugel und eine Fläche zweiter Ordnung einander längs einer ebenen Kurve berühren, so schneidet jede Tangentialebene der Kugel die Fläche in einem Kegelschnitte, für den der Berührungspunkt ein Brennpunkt ist.

(Die Kugel hat mit jeder ihrer Tangentialebenen einen Kreis vom Radius null gemeinschaftlich.)

c) Dandelinscher Satz: Der aus einem geraden Kegel durch eine beliebige Ebene ausgeschnittene Kegelschnitt hat seine Brennpunkte in den Berührungspunkten der Ebene mit den beiden Kugeln, welche aufser der Ebene noch den Kegelmantel berühren.

(Man leite diesen Satz auch rein elementar her.)

7) Welche Beziehung mufs zwischen den Axen der einzelnen Flächen zweiter Ordnung bestehen, damit die Ebenen der reellen Kreisschnitte auf einander senkrecht stehen?

8) a) Durch jede Erzeugende des Asymptotenkegels eines Hyperboloids kann man zwei Ebenen derartig legen, dafs alle zu ihnen parallelen Ebenen in gleichseitigen Hyperbeln schneiden.

(Die unendlichfernen Punkte einer gleichseitigen Hyperbel sind konjugierte Pole zum unendlichfernen Kugelkreise.)

b) Um zu erkennen, ob diese Ebenen reell sind, lege man die Ebene der Fläche in der Form zu Grunde:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1,$$

wo $a > b$ vorausgesetzt wird. Wenn jetzt $a > b > c$ ist, gehen

durch jede Gerade, welche zum Asymptotenkegel parallel ist, zwei Ebenen, deren Schnittlinien gleichseitige Hyperbeln sind. Für $c > a$ liegt auf der Fläche keine reelle gleichseitige Hyperbel, und wenn $a > c > b$ ist, hat nur ein Teil der Erzeugenden des Asymptotenkegels die Eigenschaft, dafs sich durch sie Ebenen der verlangten Art legen lassen.

c) Durch jede Gerade, welche zu einer Erzeugenden eines hyperbolischen Paraboloids parallel ist, gehen zwei Ebenen, welche die Fläche in gleichseitigen Hyperbeln schneiden.

d) Von wie viel willkürlichen Parametern hängt die Gesamtheit der in gleichseitigen Hyperbeln schneidenden Ebenen, von wie vielen die der Kreisschnitte ab?

9) a) Ordnet man jeder Ebene eines Büschels die zu ihr senkrechte Ebene eines zweiten Büschels zu, so erzeugen die Schnittlinien entsprechender Ebenen ein Hyperboloid.

(Der Satz ist ein specieller Fall des in Üb. 6) § 23 S. 173 angegebenen Satzes.)

b) Der Asymptotenkegel dieses Hyperboloids ist orthogonal (Üb. 13) zu § 31); es heifst selbst ein orthogonales Hyperboloid.

c) Diese Fläche hat die Eigenschaft, dafs auf jeder seiner Kreisscharen zwei Erzeugende der Fläche senkrecht stehen.

d) Die Gleichung eines orthogonalen Hyperboloids kann in rechtwinkligen Koordinaten auf die Form gebracht werden:

$$x^2 + y^2 + 2(\alpha x + \beta) z = m^2.$$

e) Zwischen den Koefficienten a, b, c in der Gleichung dieser Fläche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

besteht die Beziehung: $\frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}$.

f) Der geometrische Ort des Punktes, für den die Abstände von zwei festen windschiefen Geraden ein konstantes Verhältnis haben, ist ein orthogonales Hyperboloid, für das die beiden Geraden konjugierte Polare sind (vgl. Üb. 4) § 27 S. 249).

g) Wenn die Abstände gleich sind, so geht die Fläche in ein hyperbolisches Paraboloid über.

10) Welche in der unendlichfernen Ebene gelegenen Kurven zweiter Ordnung müssen als Kreise aufgefafst werden?

§ 34.

Die konfokalen Kegel zweiter Ordnung.

1. Die Hesseschen Ebenenkoordinaten, welche wir bisher mit u_1, u_2, u_3, u_4 bezeichnet haben, sollen in den folgenden Untersuchungen mit u, v, w, t bezeichnet werden, so dafs für jede reelle Ebene die Beziehung besteht: $u^2 + v^2 + w^2 = 1$, und der unendlichferne Kugelkreis die Gleichung hat: $u^2 + v^2 + w^2 = 0$. Hiernach stellt die Verbindung der Gleichungen:

$$(1) \quad t = 0, \ \alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2 = 0$$

einen Kegel dar, der den Anfangspunkt der Koordinaten zum Scheitel hat. Für $\alpha = \beta = \gamma$ führen diese beiden Gleichungen:

$$(2) \quad t = 0, \ u^2 + v^2 + w^2 = 0$$

auf den Tangentialkegel, der vom Anfangspunkte aus an den unendlichfernen Kugelkreis gelegt werden kann. Jeder Kegel, welcher für irgend einen Wert von τ durch die Gleichungen dargestellt wird:

$$(3) \quad t = 0, \ (\alpha - \tau) u^2 + (\beta - \tau) v^2 + (\gamma - \tau) w^2 = 0,$$

wird als ein mit dem Kegel (1) konfokaler Kegel bezeichnet. Demnach heifsen zwei konzentrische Kegel konfokal, wenn der durch sie bestimmten Schar der vom gemeinschaftlichen Scheitel nach dem unendlichfernen Kugelkreise führende Kegel angehört, oder mit andern Worten, wenn ihre gemeinsamen Tangentialebenen auch den unendlichfernen Kugelkreis berühren.

Die Behandlung des Falles, dafs zwei der Koefficienten α, β, γ einander gleich sind, wollen wir dem Leser überlassen; wir setzen daher in den folgenden Entwicklungen voraus, dafs

$$\alpha > \beta > \gamma$$

sein soll.

Sowohl für $\tau > \alpha$ wie für $\tau < \gamma$ stellt die Gleichung (3) einen imaginären Kegel, dagegen für $\alpha > \tau > \gamma$ einen reellen Kegel dar. Für $\alpha > \tau > \beta$ liegt die x-Axe und für $\beta > \tau > \gamma$ liegt die z-Axe im Innern des Kegels.

Drei Kegel der Schar arten in Geradenpaare aus, nämlich diejenigen, für welche τ einen der Werte α, β, γ erhält; es sind dies:

$$(4) \quad \begin{aligned} &t = 0, \ (\beta - \alpha) v^2 + (\gamma - \alpha) w^2 = 0, \\ &t = 0, \ (\alpha - \beta) u^2 + (\gamma - \beta) w^2 = 0, \\ &t = 0, \ (\alpha - \gamma) u^2 + (\beta - \gamma) w^2 = 0. \end{aligned}$$

Jedes dieser Geradenpaare liegt auf einer Hauptebene der sämtlichen Kegel; aber nur eines, nämlich das durch die mittlere Gleichung dargestellte, ist reell. Die Geraden eines solchen Paares heifsen Brennstrahlen für jeden Kegel der Schar. Die gemeinschaftlichen Tangentialebenen der konfokalen Kegel gehen auch durch die Brennstrahlen hindurch.

Die Tangentialebenen an einen Kegel zweiter Ordnung, welche zugleich den unendlichfernen Kugelkreis berühren, gehen auch durch zwei reelle Geraden, die Brennstrahlen des Kegels, hindurch.

2. Jede der drei Hauptebenen hat in der auf ihr senkrecht stehenden Axe die gemeinsame Polare in Bezug auf alle Kegel der Schar. Dagegen giebt es zu jeder andern Ebene, welche durch den Scheitel geht, nur eine einzige konjugierte Polarebene, nämlich diejenige Ebene, in welcher die sämtlichen Polaren in Bezug auf die einzelnen Kegel der Schar liegen.

Zwei Ebenen, welche konjugierte Polarebenen zu einander sind für alle Flächen der Schar, sind einander auch in Bezug auf den durch den unendlichfernen Kugelkreis gehenden Kegel zugeordnet und stehen infolge dessen auf einander senkrecht. Sie müssen auch zu einander konjugiert sein in Bezug auf jedes der Geradenpaare (4); aus diesem Grunde schneiden sie jede Hauptebene in zwei Strahlen, welche zu den in ihr liegenden Brennstrahlen harmonisch liegen. Sobald aber zwei Ebenen konjugierte Polarebenen von einander sind in Bezug auf zwei Kegel der Schar, kommt ihnen dieselbe Eigenschaft in Bezug auf alle Flächen der Schar zu. Diese einfache Bemerkung gestattet es uns, wichtige Eigenschaften von solchen Ebenenpaaren zu finden.

3. So seien m und n zwei in einer Hauptebene liegende und vom gemeinsamen Mittelpunkte ausgehende Strahlen, welche harmonisch liegen zu den beiden in dieser Ebene enthaltenen Brennstrahlen. Legt man durch m eine beliebige Ebene E und durch n die zu ihr normale Ebene E', so sind diese beiden konjugierte Polarebenen in Bezug auf den Kegel (2) und den Kegel (4); folglich sind sie zu einander in Bezug auf alle Kegel (3) konjugiert. Demnach mufs auch die Normalebene, welche von der Polare der Ebene E in Bezug auf irgend einen Kegel der Schar auf diese Ebene gefällt wird, durch die Gerade n gehen. Somit

kann man irgend einen Strahl m, der in einer Hauptebene eines Kegels vom Scheitel ausgeht, zur Axe eines Ebenenbüschels wählen; zu jeder Ebene E dieses Büschels suche man die Polare in Bezug auf den Kegel und fälle von dieser Geraden aus die senkrechte Ebene E′ auf E; dann geht E′ durch einen zweiten festen Strahl n der Hauptebene. Indem die Ebene E den Büschel um die Gerade m beschreibt, bewegt sich auch E′ um die Gerade n. Geht man umgekehrt von dem zweiten Büschel aus, so führt die Konstruktion auf den ersten Büschel. Wenn jetzt m den Strahlenbüschel beschreibt, welcher in der ausgewählten Hauptebene den Mittelpunkt des Kegels zum Scheitel hat, so beschreibt die Gerade n denselben Strahlenbüschel in der Weise, dafs die Geraden desselben einander involutorisch zugeordnet werden; die Hauptstrahlen dieser Involution sind die Brennstrahlen.

4. Man gehe speciell von einem Brennstrahle e aus. In Bezug auf den zerfallenden Kegel, dem er angehört, sind zwei beliebige durch ihn gehende Ebenen konjugierte Polarebenen. Daher sind zwei durch e gelegte und auf einander senkrecht stehende Ebenen zu einander konjugiert in Bezug auf alle Kegel der Schar. Jeder Brennstrahl eines Kegels zweiter Ordnung hat also die Eigenschaft, dafs die Paare der durch ihn hindurchgelegten konjugierten Polarebenen eine Kreisinvolution bilden; umgekehrt ist jede Gerade, für welche die zugehörige Ebeneninvolution orthogonal ist, ein Brennstrahl des Kegels.

Nimmt man jetzt die Polarebene des Brennstrahls, die zugehörige Direktrixebene, hinzu, so kann man die Polare zu jeder durch den Brennstrahl e gehenden Ebene leicht konstruieren, indem man den Strahl bestimmt, in welchem die in e auf dieser Ebene errichtete Normalebene die Direktrixebene schneidet. Die Tangentialebenen, welche von einem Strahle a der Direktrixebene ausgehen, berühren in zwei Geraden, welche mit dem Brennstrahle in einer Ebene liegen, und diese Ebene steht senkrecht zu der die Geraden a und e verbindenden Ebene. Eine beliebige Tangentialebene möge längs einer Geraden g berühren und die Direktrixebene in einer Geraden a schneiden; diese beiden Geraden bestimmen im Verein mit dem zugehörigen Brennstrahle ein Dreikant, dessen Ebenen im Brennstrahle auf einander senkrecht stehen.

5. Der Kegel K möge die Ebene A längs der Geraden a berühren. Durch a lege man die zu A normale Ebene B und bestimme denjenigen Kegel K′ der Schar, welcher die Ebene B berührt. Dann sind die Ebenen A und B konjugierte Polarebenen für den Kegel K und für den Kegel (2), somit auch für alle Kegel der Schar, speciell für den Kegel K′. Demnach wird die Ebene B vom Kegel K′ längs der Geraden a berührt; die Gerade a gehört auch dem zweiten Kegel an. Da zudem die Ebenen A und B konjugierte Polarebenen von einander sind für jeden beliebigen Kegel der Schar, liegen sie harmonisch zu den beiden Tangentialebenen an einen solchen Kegel und halbieren die von diesen Ebenen gebildeten Winkel.

6. Umgekehrt lege man durch irgend einen vom gemeinschaftlichen Mittelpunkte ausgehenden Strahl a die Tangentialebenen an einen Kegel der Schar und halbiere die von diesen beiden Ebenen gebildeten Keile durch die Ebenen A und B. Da diese beiden Ebenen konjugierte Polarebenen sind erstens für den ausgewählten Kegel und zweitens für den zum unendlichfernen Kugelkreise führenden Kegel, so sind sie zu einander in Bezug auf jeden Kegel der Schar konjugiert. Demnach müssen diejenigen beiden Kegel, welche von den Ebenen A und B berührt werden, durch den Strahl a gehen. Nimmt man noch einen weiteren konfokalen Kegel hinzu und legt an ihn vom Strahle a aus die Tangentialebenen, so sind auch diese gegen die Ebenen A und B gleich geneigt. Speciell müssen auch die Ebenen, welche nach den beiden reellen Brennstrahlen gelegt werden können, als Tangentialebenen an einen konfokalen Kegel aufgefafst werden.

Diese einfache Betrachtung führt zu einer Reihe von interessanten Sätzen, welche wir hier zusammenstellen wollen.

Durch jeden Strahl, welcher vom Scheitel konfokaler Kegel zweiter Ordnung ausgeht, lassen sich zwei Kegel der Schar legen. Diese durchschneiden einander rechtwinklig, und die Tangentialebenen halbieren die Winkel der beiden Tangentialebenen, welche vom Strahle aus an irgend einen Kegel der Schar gelegt werden können.

Zwei konfokale Kegel zweiter Ordnung haben entweder keinen Strahl gemeinschaftlich oder sie durch-

schneiden einander in vier Strahlen so, dafs sie in jedem dieser Strahlen auf einander senkrecht stehen.

Wenn von einem Strahle aus an den einen von zwei konfokalen Kegeln die Tangentialebenen A und B, an den andern die Tangentialebenen C und D gelegt sind, so sind die Winkel (AC) und (BD) einander gleich.

Jede Tangentialebene an einen Kegel zweiter Ordnung ist gleich geneigt zu den beiden Ebenen, welche den Berührungsstrahl mit den Brennstrahlen verbinden.

Verbindet man die Schnittlinie von zwei Tangentialebenen an einen Kegel zweiter Ordnung je mit den Brennstrahlen durch eine Ebene, so bildet die erste Tangentialebene mit der einen Verbindungsebene denselben Winkel, wie die zweite Tangentialebene mit der andern Verbindungsebene.

7. Die Schar konfokaler Kegel kann auch vermittelst Punktkoordinaten behandelt werden. Für rechtwinklige Cartesische Koordinaten geht die Gleichung (3) über in

$$(5)\quad \frac{x^2}{\alpha-\tau}+\frac{y^2}{\beta-\tau}+\frac{z^2}{\gamma-\tau}=0.$$

Diese Gleichung hat für jedes gegebene Wertsystem (x, y, z), das keine verschwindende Koordinate enthält, zwei reelle Wurzeln λ und μ, welche der Bedingung genügen:

$$\alpha>\lambda>\beta>\mu>\gamma.$$

Zugleich gilt die Gleichung:

$$(6)\quad \frac{x^2}{(\alpha-\lambda)(\alpha-\mu)}+\frac{y^2}{(\beta-\lambda)(\beta-\mu)}+\frac{z^2}{(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)}=0.$$

Ferner besteht für $r^2=x^2+y^2+z^2$ bei jedem Werte von τ die Relation:

$$(7)\quad r^2(\tau-\lambda)(\tau-\mu)=x^2(\beta-\tau)(\gamma-\tau)+y^2(\alpha-\tau)(\gamma-\tau)+z^2(\alpha-\tau)(\beta-\tau).$$

Daraus ergeben sich die Gleichungen:

$$(8)\quad x^2=\frac{(\alpha-\lambda)(\alpha-\mu)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}r^2,\quad y^2=\frac{(\beta-\lambda)(\beta-\mu)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}r^2,$$
$$z^2=\frac{(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}r^2.$$

Diese Gleichungen entsprechen ganz denjenigen Gleichungen, welche wir für konfokale Kegelschnitte im ersten Teile (S. 215 bis 218) benutzt haben.

8. Der Schnitt eines Kegels mit einer konzentrischen Kugel wird als ein sphärischer Kegelschnitt bezeichnet. Aus jedem Satze über einen Kegel geht unmittelbar ein Satz über einen sphärischen Kegelschnitt hervor. Wir wollen deshalb im folgenden die wichtigsten Sätze zusammenstellen, welche sich aus den vorangehenden Untersuchungen für diese Kurven ergeben. Dabei wollen wir von dem Schnitte einer Kugel mit einem geraden Kreiskegel, dem Kreise, absehen und wiederum annehmen, die zu Grunde gelegte Gleichung (1) habe drei ungleiche Koefficienten.

Der sphärische Kegelschnitt hat drei Paare von Mittelpunkten; jeder Mittelpunkt hat von allen Mittelpunkten der andern Paare den sphärischen Abstand $\frac{1}{2}\pi$.

Eine solche Kurve besteht, falls sie reell ist, aus zwei getrennten Zweigen; zwei Mittelpunkte, welche Gegenpunkte von einander sind, liegen im Innern, die andern im Äußern der Kurve.

Die imaginären Tangenten an einen sphärischen Kegelschnitt, welche zugleich den unendlichfernen Kugelkreis berühren, gehen durch zwei Paare von reellen Punkten, die Brennpunkte des Kegelschnittes.

Als konfokale sphärische Kegelschnitte (d. h. als Kegelschnitte mit denselben Brennpunkten) können solche definiert werden, deren gemeinsame Tangenten auch den unendlichfernen Kugelkreis berühren.

Die Winkel, welche die von einem Punkte der Kurve nach den Brennpunkten gezogenen Hauptkreise mit einander bilden, werden durch die Tangente und die Normale des Punktes halbiert.

Durch jeden Punkt der Kugel gehen zwei Kurven, welche einer gegebenen Schar konfokaler Kegelschnitte angehören; diese durchschneiden einander rechtwinklig. Die in diesem Punkte an die beiden hindurchgehenden Kurven gelegten Tangenten halbieren die Winkel der beiden Tangenten, welche von dem Punkte aus an irgend einen Kegelschnitt der Schar gelegt werden.

Die in einem Brennpunkte eines sphärischen Kegelschnittes in Bezug auf denselben erzeugte Involution ist orthogonal.

Indem wir wieder die Polare seines Brennpunktes als die zugehörige Direktrix bezeichnen, können wir die Sätze aufstellen:

Der Pol eines jeden durch einen Brennpunkt gehenden Hauptkreises liegt im Schnittpunkt der Direktrix mit der Senkrechten, welche im Brennpunkte auf dem gegebenen Hauptkreise errichtet wird.

Die auf einer Tangente von ihrem Berührungspunkte und dem Schnitt mit einer Direktrix begrenzte Strecke erscheint von dem zugehörigen Brennpunkte aus unter einem rechten Winkel.

9. Wenn wir unserer Untersuchung ein specielles Koordinatensystem zu Grunde gelegt haben, so thut das der Allgemeinheit der Resultate keinen Abbruch. Denn jeder Kegel kann, indem er auf seine Axen bezogen wird, durch die Gleichungen (1) dargestellt werden; die Gleichung (2) giebt aber bei jeder Lage der (rechtwinkligen) Axen den vom Anfangspunkte nach dem unendlichfernen Kugelkreise gelegten Kegel. Unsere Resultate gelten also für jede Schar konzentrischer Kegel, welcher der zum unendlichfernen Kugelkreise führende Kegel angehört.

Übungen:

1) Auf welcher Ebene liegen die reellen Brennstrahlen des Kegels

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2} \quad \text{für } a > b?$$

2) a) Man untersuche die Schar konfokaler Cylinder, indem man die durchgeführten analytischen Entwicklungen in geeigneter Weise umändert. Zu jedem der gefundenen Resultate gebe man den entsprechenden Satz an.

b) Umgekehrt übertrage man die für konfokale Kegelschnitte geltenden Sätze rein geometrisch auf Cylinder, indem man jeden Punkt der Ebene durch die in ihm auf der Ebene errichtete Senkrechte ersetzt.

3) a) Für jeden (eigentlichen) Kegel zweiter Ordnung ist die Summe oder die Differenz der Winkel konstant, welche die beiden Brennstrahlen mit einer seiner Erzeugenden einschliefsen.

(Man benutze die beiden letzten in 6. angegebenen Sätze, indem man noch zu dem einen Brennstrahle den Gegenstrahl in Bezug auf die eine, und zu dem andern Brennstrahle den Gegenstrahl in Bezug auf die andere Tangentialebene konstruiert.)

b) Für jeden Kegel zweiter Ordnung ist je nach der auf den Brennstrahlen gewählten Richtung die Summe oder die Differenz der Winkel konstant, welche die Kanten mit den Brennstrahlen einschliefsen.

(Wenn die Summe der Winkel (fa) und (f'a) konstant ist, wo f und f' zwei Halbgeraden auf den Brennstrahlen sind und a eine beliebige Erzeugende ist, so kann man f' durch die demselben Brennstrahle angehörende entgegengesetzte Halbgerade f_1 ersetzen; dann ist $(f'a) + (f_1 a) = \pi$, also ist auch $(fa) - (f_1 a)$ konstant.)

4) a) Die Polare zur Ebene (u, v, w, 0) in Bezug auf den Kegel (2), d. i. die auf dieser Ebene im Scheitel errichtete Senkrechte, hat rechtwinklige Koordinaten (x, y, z), die sich wie u : v : w verhalten. Demnach hat derjenige Kegel, dessen Erzeugende je auf den Tangentialebenen des Kegels (1) senkrecht stehen, der Reciprokalkegel, die Gleichung:

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 0 \text{ oder } \frac{u^2}{\alpha} + \frac{v^2}{\beta} + \frac{w^2}{\gamma} = 0, \; t = 0.$$

b) Die Brennstrahlen eines Kegels stehen auf den Kreisschnitten des Reciprokalkegels senkrecht.

5) Der in 4) eingeführte Reciprokalkegel ermöglicht es, zu jedem Satze über Brennstrahlen einen entsprechenden Satz über Kreisschnitte anzugeben.

a) Die Geraden, in denen eine Berührungsebene eines Kegels von den beiden durch seinen Scheitel gehenden Kreisebenen geschnitten wird, bilden mit dem Berührungsstrahle der Ebene gleiche Winkel.

b) Sind a und b zwei Erzeugende des Kegels und c und d die Geraden, in denen ihre Verbindungsebene die Kreisebenen schneidet, so sind die Winkel (ac) und (bd) einander gleich.

c) Die Summe der Winkel, welche eine Berührungsebene mit den Kreisebenen bildet, ist konstant.

6) Zu den Sätzen über die Brennpunkte eines sphärischen Kegelschnittes fügen wir die folgenden hinzu:

a) Der sphärische Kegelschnitt hat vier Brennpunkte, welche paarweise im Innern eines der beiden Zweige liegen. Für zwei Brennpunkte, welche im Innern desselben Zweiges liegen, ist die Summe der sphärischen Entfernungen für alle Punkte je eines

Zweiges konstant; wählt man zwei Brennpunkte innerhalb verschiedener Zweige, so ist die Differenz der Brennstrahlen konstant.

b) Das Produkt aus den Sinus der beiden Senkrechten, welche von den Brennpunkten auf eine Tangente gefällt werden, ist konstant.

c) Die Fokalstrahlen zweier Punkte der Kurve bilden ein sphärisches Viereck, welches einem Kreise umgeschrieben ist.

(Sind von den Punkten α und β die Hauptkreise nach den Brennpunkten gezogen, so kann man, weil jeder dieser Hauptkreise zwei Brennpunkte enthält, diese so wählen, daſs die Differenz der Brennstrahlen dieselbe ist oder daſs, wenn a und b die Brennstrahlen von α, c und d die von β sind, $a - b = d - c$, also $a + c = b + d$ ist.)

d) Der sphärische Kegelschnitt ist der Ort eines Punktes, für den der Sinus der sphärischen Entfernung von einem festen Punkte in konstantem Verhältnisse steht zum Sinus des sphärischen Abstandes von einem festen Hauptkreise.

e) Die Fuſspunkte der von einem Brennpunkte auf die Tangenten gefällten Senkrechten liegen auf einem Kreise.

7) Indem wir die für Brennpunkte geltenden Sätze vermittelst des Reciprokalkegels (Üb. 4) und des ihm entsprechenden Kegelschnittes auf die Schnittlinien mit den beiden Kreisebenen, die cyklischen Linien, übertragen, erhalten wir folgende Sätze:

a) Jede Tangente eines sphärischen Kegelschnittes bildet mit den cyklischen Linien Winkel, deren Summe konstant ist.

b) Das Dreieck, welches die beiden cyklischen Linien mit einer Tangente einschlieſsen, hat einen von der Wahl der Tangente unabhängigen Inhalt [nach a)].

c) Wenn ein Hauptkreis einen sphärischen Kegelschnitt in den Punkten α und β und seine cyklischen Linien in den Punkten γ und δ schneidet, so ist $\alpha\gamma = \beta\delta$.

d) Der zwischen zwei cyklischen Linien liegende Teil einer Tangente wird im Berührungspunkte halbiert.

e) Irgend zwei Tangenten schneiden die cyklischen Linien in vier Punkten, welche auf einem Kreise liegen.

8) Man begründe mittelst der angegebenen Sätze die Richtigkeit folgender Bemerkung: Ein sphärischer Kegelschnitt kann sowohl als Ellipse wie als Hyperbel aufgefaſst werden; das Analogon

zu den Brennpunkten bilden wieder die Brennpunkte, während den Asymptoten die cyklischen Linien entsprechen.

9) Als einen Büschel von ähnlichen sphärischen Kegelschnitten definieren wir denjenigen Büschel, der den unendlichfernen Kugelkreis enthält, der also durch die Gleichung:

$$\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}+\frac{z^2}{\gamma}-\lambda(x^2+y^2+z^2)=0$$

dargestellt wird. Um den Namen zu rechtfertigen, weisen wir darauf hin, dafs auf jedem vom Punkte (0, 0, 1) ausgehenden Hauptkreise durch die zu den Parametern λ und λ' gehörenden Kurven Strecken abgeschnitten werden, deren Sinusquadrate sich verhalten wie $\lambda\gamma - 1$ zu $\lambda'\gamma - 1$.

a) Dem Büschel gehören drei Paare von Hauptkreisen an; nur eines dieser Paare ist reell (die cyklischen Linien).

b) Durch jeden Punkt auf der Kugel geht eine Kurve des Büschels, und jeder Hauptkreis wird von zwei reellen Kurven desselben berührt; die vier Berührungspunkte teilen den Hauptkreis in vier gleiche Teile. Diese Punkte sind die Halbierungspunkte für jede Sehne, welche auf dem Hauptkreise durch eine Kurve des Büschels ausgeschnitten wird.

c) Jeder Punkt, der nicht mit einem Mittelpunkte der Kurven zusammenfällt, ist zu einem Punkte (und seinem Gegenpunkte) konjugierter Pol in Bezug auf alle Kurven des Büschels. Irgend zwei derartig mit einander verbundene Punkte haben den sphärischen Abstand $\frac{1}{2}\pi$.

§ 35.

Die Schar der konfokalen Flächen zweiter Ordnung.

1. Es sei

$$(1)\quad F(u, v, w, t) = 0$$

die Gleichung einer Fläche zweiter Klasse in Hesseschen Koordinaten. Indem wir aus dieser Fläche und dem unendlichfernen Kugelkreise

$$(2)\quad u^2 + v^2 + w^2 = 0$$

eine Flächenschar

$$(3)\quad F(u, v, w, t) - \tau(u^2 + v^2 + w^2) = 0$$

bilden, erhalten wir alle diejenigen Flächen, welche mit den gegebenen Flächen konfokal sind. Wir nennen demnach zwei

Flächen zweiter Ordnung konfokal, wenn ihre gemeinschaftlichen Tangentialebenen auch den unendlichfernen Kugelkreis berühren. Aus dem Begriffe der Schar folgt, dafs jede Ebene des Raumes von einer Fläche berührt wird, die mit einer gegebenen Fläche konfokal ist.

2. Wie wir wissen, besitzt die Gleichung vierten Grades, durch welche die einer Schar angehörenden Grenzflächen gefunden werden, nur dann gleiche Wurzeln, wenn die Flächen einander berühren. Im vorliegenden Falle gehört der Schar eine uneigentliche imaginäre Fläche, der unendlichferne Kugelkreis, an; folglich sind in Bezug auf Berührung nur vier Fälle möglich: entweder berühren die Flächen einander gar nicht, oder sie berühren einander in einem beliebigen unendlichfernen Punkte, oder die Berührung findet in zwei Punkten des unendlichfernen Kugelkreises statt, oder die Flächen berühren einander längs dieses Kreises. Im dritten Falle ist die Fläche (1) eine Umdrehungsfläche, im vierten eine Kugel. Davon wollen wir in den folgenden Untersuchungen ganz absehen und dem Leser überlassen, derartige Scharen zu untersuchen.

Im ersten Falle hat die Schar vier, im zweiten drei Kegelschnitte als Grenzflächen. Die eine ist immer der unendlichferne Kugelkreis; die andern sollen die Fokalkurven der Schar und zugleich die Fokalkurven für jede der Schar angehörende Fläche genannt werden. Ihre Ebenen haben für alle Flächen der Schar denselben Pol.

3. Die wichtigsten Eigenschaften konfokaler Flächen ergeben sich aus dem Satze, dafs irgend zwei Ebenen, welche konjugierte Polarebenen für die Fläche (2) sind, auf einander senkrecht stehen. Um daher alle diejenigen Ebenen zu finden, welche zu einer willkürlich gegebenen Ebene E in Bezug auf alle Flächen der Schar konjugierte Polarebenen sind, hat man ihren Pol π in Bezug auf eine beliebige Fläche der Schar zu suchen und von diesem Punkte die Senkrechte p auf die Ebene E zu fällen; alle durch p gelegten Ebenen sind konjugierte Polarebenen von E für zwei und damit für alle Ebenen der Schar. Die Gerade p, welche auf E senkrecht steht, enthält die Pole von E in Bezug auf alle zu (1) konfokalen Flächen.

4. Wenn der Punkt π zugleich der Pol für den unendlich-

fernen Kugelkreis ist, wenn also alle durch π gehenden Geraden auf der Ebene E senkrecht stehen, so hat die Ebene E für alle Flächen der Schar denselben Pol. Solcher Ebenen giebt es drei oder vier; die eine von ihnen ist die unendlichferne Ebene als singuläre Ebene der Fläche (2). Wenn der Pol dieser Ebene ihr nicht angehört, so ist er der gemeinsame Mittelpunkt der Flächen; wenn aber die unendlichferne Ebene eine Fläche der Schar berührt, so ist sie Tangentialebene an alle Flächen und ihr Berührungspunkt ist für alle derselbe.

Für jede andere Ebene mit gemeinsamem Pole kann dieser nur in der unendlichfernen Ebene und senkrecht über der Ebene liegen. Die eigentlichen Ebenen, welche dieser Forderung genügen, sind Hauptebenen für die Flächen der Schar.

Die konfokalen Flächen derselben Schar sind entweder sämtlich Mittelpunktsflächen mit denselben Axen oder sämtlich Paraboloide mit denselben beiden Hauptebenen.

5. Von einem gegebenen Punkte π des Raumes lege man den Tangentialkegel an eine beliebige Fläche der Schar und bestimme die drei Hauptebenen L, M, N dieses Kegels. Diese drei Ebenen bilden ein Polardreikant sowohl für die ausgewählte Fläche wie für den unendlichfernen Kugelkreis, also auch für jede Fläche der Schar. Die gemeinsamen Polarebenen zur Ebene L gehen somit durch die Schnittlinie der Ebenen M und N; ebenso gehen die zu M gemeinschaftlichen Polarebenen durch den Schnitt von L und N, und die zu N gemeinschaftlichen Polarebenen durch den Schnitt von L und M. Diejenige Fläche der Schar, welche von der Ebene L berührt wird, hat demnach auch alle durch die Schnittlinie von M und N gehenden Ebenen zu Polarebenen; der Schnittpunkt π dieser drei Ebenen mufs der Berührungspunkt der Ebene L sein. Dieselbe Betrachtung zeigt, dafs auch die Berührungspunkte der Ebenen M und N je mit dem Punkte π zusammenfallen. Durch jeden Punkt des Raumes gehen also drei reelle Flächen der Schar, welche einander rechtwinklig schneiden. Ihre Tangentialebenen sind die Hauptebenen für den Tangentialkegel, welcher von dem Punkte aus an irgend eine Fläche der Schar gelegt werden kann.

6. Zu diesen Resultaten können wir auch durch folgende

Betrachtung gelangen. Um den Tangentialkegel an die Fläche (3) zu erhalten, welcher vom Punkte (x', y', z') ausgeht, haben wir die Gleichung (3) mit der Gleichung

$$(4) \quad ux' + vy' + wz' + t = 0$$

zu verbinden. Daraus geht hervor, dafs die Gesamtheit dieser Kegel in dem Sinne, den wir im vorigen Paragraphen festgesetzt haben, eine Schar konfokaler Kegel bildet. Alle diese Kegel haben dieselben Axen; ihnen gehören drei Geradenpaare an, deren singuläre Ebenen je zwei von den gemeinsamen Axen enthalten. Da ein Tangentialkegel nur dann in ein Geradenpaar übergeht, wenn der Scheitel des Kegels dem Büschel angehört, so gehen durch den Punkt (x', y', z') drei Flächen der Schar; die singuläre Ebene der Geradenpaare wird jedesmal zur Tangentialebene der Fläche. Wir finden also den Satz:

Durch jeden Punkt des Raumes gehen drei Flächen, welche zu einer gegebenen Fläche konfokal sind. Ihre Tangentialebenen stehen auf einander senkrecht und sind die Hauptebenen für jeden Tangentialkegel, welcher von dem Punkte aus an eine Fläche der Schar gelegt werden kann.

7. Wie wir im vorigen Paragraphen gesehen haben, sind von den drei Geradenpaaren, welche der Schar konfokaler Kegel angehören, zwei imaginär und eines reell; das letzte liefert die Brennstrahlen für jeden Kegel der Schar. Daher schneiden sich in jedem Punkte des Raumes zwei ungeradlinige und eine geradlinige Fläche der Schar; die beiden von dem Punkte ausgehenden Geraden der hindurchgehenden geradlinigen Fläche sind die gemeinsamen Brennstrahlen für die Tangentialkegel, welche von dem Punkte aus an die konfokalen Flächen gelegt werden können.

8. Betrachten wir jetzt zwei sich schneidende konfokale Flächen. Durch jeden Punkt der Schnittlinie geht noch eine dritte Fläche der Schar in der Weise, dafs die Tangentialebenen der drei Flächen auf einander senkrecht stehen. Indem wir jedesmal von der dritten Ebene absehen und als Winkel zweier krummen Flächen den ihrer Tangentialebenen bezeichnen, können wir sagen:

Zwei einander schneidende konfokale Flächen stehen längs ihrer Schnittlinie auf einander senkrecht.

9. Nach § 26, 9. 10 (S. 219) bilden die Tangentialkegel, welche von einem festen Punkte aus an die Flächen einer Schar zweiter Klasse gelegt werden können, wiederum eine Schar zweiter Klasse. Die Eigenschaften dieser Kegelschar hangen vor allem davon ab, ob der Scheitel allgemeine Lage hat oder auf der zur Flächenschar gehörenden abwickelbaren Fläche oder speciell auf einem Kegelschnitte der Schar liegt. In unserm Falle ist die abwickelbare Fläche imaginär, und es sind aufser dem unendlichfernen Kugelkreise die Fokalkurven die einzigen Kegelschnitte, welche der Schar angehören. Somit erleiden die soeben entwickelten Sätze nur dann eine Ausnahme, wenn der Punkt auf einer Fokalkurve der Schar angenommen wird. Alsdann gehen die von ihm ausgehenden Tangentialkegel (nach § 25, 11. 12) eine doppelte Berührung ein; sie berühren daher auch jeden Kegelschnitt in zwei Punkten, der auf einem dieser Kegel liegt, speciell den unendlichfernen Kugelkreis. Jeder Kegel, dessen Scheitel auf einer Fokalkurve liegt und der eine Fläche der Schar berührt, geht hiernach mit dem unendlichfernen Kugelkreise eine doppelte Berührung ein; er ist ein gerader Kreis- oder Umdrehungskegel.

Jede Fläche zweiter Ordnung wird von unendlich vielen Umdrehungskegeln berührt; es sind das diejenigen Tangentialkegel, deren Scheitel auf einer Fokalkurve der Fläche liegen.

10. Tangentialkegel, welche an die Flächen einer Schar von einem Punkte eines in der Schar enthaltenen Kegelschnittes gelegt werden können, haben (nach § 25, 13) die besondere Eigenschaft, unendlich viele gemeinsame Polardreikante zu besitzen; die eine Kante ist die in dem Punkte an den Kegelschnitt gelegte Tangente, die beiden andern liegen in einer festen Ebene. In unserm Falle, wo die gemeinsamen Polartripel auf einander senkrecht stehen, bildet die Tangente an die Fokalkurve mit irgend zwei Geraden, welche im Berührungspunkte auf ihr und unter einander senkrecht stehen, ein Axentripel für jeden Tangentialkegel, dessen Scheitel mit diesem Punkte zusammenfällt.

Jede Tangente an eine Fokalkurve einer Fläche zweiter Ordnung ist Rotationsaxe für denjenigen Kegel, welcher ihren Berührungspunkt zum Scheitel hat und die gegebene Fläche berührt.

11. Wenn man durch eine gerade Linie g des Raumes die Tangentialebenen an eine Fläche der Schar legt und die durch diese Ebenen gebildeten Keile durch die Ebenen M und N halbiert, so sind diese beiden Ebenen konjugierte Polarebenen für alle Flächen der Schar. Demnach sind auch M und N konjugierte Polarebenen von einander sowohl für diejenige Fläche der Schar, welche von der Ebene M, wie für diejenige, welche von der Ebene N berührt wird. Jede dieser beiden Flächen berührt also in einem Punkte der gegebenen Geraden eine durch die Gerade hindurchgehende Ebene oder sie berührt die Gerade g selbst.

Jede Gerade des Raumes berührt im allgemeinen zwei Flächen einer Schar konfokaler Flächen zweiter Ordnung; die Tangentialebenen derselben stehen auf einander senkrecht und halbieren die Winkel, welche die beiden durch die Gerade an irgend eine Fläche der Schar gelegten Tangentialebenen mit einander bilden.

12. Dieser Satz erleidet nur eine Ausnahme, wenn die Gerade einer Fläche der Schar angehört. Schneiden jetzt zwei Ebenen M und N einander rechtwinklig in einer solchen Geraden, so sind sie konjugierte Polarebenen sowohl in Bezug auf diejenige Fläche, auf welcher die Gerade liegt, als auch in Bezug auf den unendlichfernen Kugelkreis. Daher sind irgend zwei solche Ebenen konjugierte Polarebenen von einander für jede Fläche der Schar; die zur Geraden gehörende Ebeneninvolution ist orthogonal.

Die Involution, welche von den durch eine gerade Linie gehenden konjugierten Polarebenen einer Fläche zweiter Ordnung gebildet wird, ist orthogonal, wenn sich durch die Gerade eine konfokale Fläche legen läfst.

13. Wenn die Fläche (1) die unendlichferne Ebene nicht berührt, so können wir die Hesseschen Koordinaten so transformieren, dafs die Gleichung (1) die Gestalt annimmt:

$$(5)\quad \alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2 - t^2 = 0.$$

Die oben gemachte Annahme verlangt, dafs die drei Koefficienten α, β, γ verschieden sind; wir dürfen daher

$$\alpha > \beta > \gamma$$

voraussetzen.

Die Gleichung (2) behält ihre Form bei; daher erscheint jetzt die Gleichung für die Flächen der Schar in der Form:

$$(6)\quad (\alpha-\tau)\,u^2+(\beta-\tau)\,v^2+(\gamma-\tau)\,w^2-t^2=0.$$

Wir sehen aus dieser Gleichung wieder, dafs alle Flächen denselben Mittelpunkt und dieselben Axen besitzen.

Für $\tau>\alpha$ werden alle Koefficienten in (6) negativ; für $\alpha>\tau>\beta$ ist nur der Koefficient von u^2 positiv; für $\beta>\tau>\gamma$ sind die Koefficienten von u^2 und v^2, endlich für $\gamma>\tau$ die von u^2, v^2, w^2 positiv. Daher stellt die Gleichung (6) im ersten Falle eine imaginäre Fläche, im zweiten ein zweischaliges Hyperboloid, im dritten ein einschaliges Hyperboloid und im letzten Falle ein Ellipsoid dar.

14. Die Gleichung (6) stellt eine Grenzfläche, einen Kegelschnitt dar, wenn τ einen der Werte α, β, γ annimmt. Demnach sind die Gleichungen der Fokalkurven

$$(7)\quad \begin{aligned}(\beta-\alpha)\,v^2+(\gamma-\alpha)\,w^2-t^2&=0\\ (\alpha-\beta)\,u^2+(\gamma-\beta)\,w^2-t^2&=0\\ (\alpha-\gamma)\,u^2+(\beta-\gamma)\,w^2-t^2&=0.\end{aligned}$$

Von diesen drei Kurven ist die erste imaginär, die zweite eine Hyperbel, die dritte eine Ellipse.

Indem wir eine Ausdrucksweise, welche für den Fall, dafs die Gleichung (5) ein Ellipsoid darstellt, geometrisch als ganz berechtigt anerkannt werden mufs, auf beliebige Mittelpunktsflächen übertragen, nennen wir bei der gemachten Annahme die erste Axe (die x-Axe) die gröfste, die y-Axe die mittlere und die z-Axe die kleinste Axe. Alsdann ist diejenige Fokalkurve imaginär, welche in der Ebene der beiden kleinsten Axen liegt; die durch die gröfste und kleinste Axe gelegte Ebene enthält die Fokalhyperbel und die durch die beiden gröfsten Axen gehende Ebene die Fokalellipse. Die gröfste Axe der Fläche ist auch die gröfste Axe für die Fokalellipse und die reelle Axe für die Fokalhyperbel. Die Scheitelpunkte der Fokalhyperbel sind die Brennpunkte der Fokalellipse, und die Endpunkte der grofsen Axe der Fokalellipse sind die Brennpunkte der Fokalhyperbel.

Von den Fokallinien einer Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung sind stets zwei reell; diese liegen in denjenigen beiden Hauptebenen, welche sich durch die gröfste reelle Axe legen lassen. Die eine ist eine Ellipse, die andere eine Hyperbel; jede von diesen beiden Kurven geht durch die Brennpunkte der andern hindurch.

15. Wenn die Fläche (1) ein Paraboloid ist, also ihre Gleichung auf die Form gebracht werden kann:

$$(8) \quad \alpha u^2 + \beta v^2 - 2wt = 0,$$

wo wieder $\alpha > \beta$ vorausgesetzt werden soll, so haben alle konfokalen Flächen die Gleichung:

$$(9) \quad (\alpha - \tau) u^2 + (\beta - \tau) v^2 - \tau w^2 - 2wt = 0.$$

Alle diese Flächen sind Paraboloide, für welche die Axe und die Hauptebenen identisch sind, während der Scheitel jede Lage auf der Axe erhalten kann. Für $\tau > \alpha$ und für $\tau < \beta$ stellt die Gleichung (9) ein elliptisches, für $\alpha > \tau > \beta$ ein hyperbolisches Paraboloid dar.

Die beiden Fokalkurven der Schar haben die Gleichungen:

$$(10) \quad \begin{aligned} (\alpha - \beta) v^2 + \alpha w^2 + 2wt &= 0 \\ (\alpha - \beta) u^2 - \beta w^2 - 2wt &= 0. \end{aligned}$$

Beide sind Parabeln, welche dieselbe Axe besitzen und in zwei zu einander normalen Ebenen liegen; der Brennpunkt der einen ist der Scheitel der andern.

16. Indem wir den Anfangspunkt des Koordinatensystems in einen beliebigen Punkt verlegen und die Axen des von diesem Punkte aus an die Fläche (1) gelegten Tangentialkegels zu Koordinatenaxen wählen, nimmt die Gleichung (1) die Form an:

$$(11) \quad tA + \lambda u^2 + \mu v^2 + \nu w^2 = 0,$$

wo A eine homogene lineare Form von u, v, w, t ist. Daher nimmt die Gleichung (3) jetzt die Gestalt an:

$$(12) \quad tA + (\lambda - \tau) u^2 + (\mu - \tau) v^2 + (\nu - \tau) w^2 = 0.$$

Das System der von dem neuen Anfangspunkte ausgehenden Tangentialkegel kann also durch die Gleichungen dargestellt werden:

$$(13) \quad t = 0, \ (\lambda - \tau) u^2 + (\mu - \tau) v^2 + (\nu - \tau) w^2 = 0.$$

Wir erkennen wieder, daſs die Tangentialkegel konfokal sind und dieselben Axen besitzen.

Die Gleichung (13) stellt für $\tau = \lambda$ ein Geradenpaar dar, dessen singuläre Ebene die entsprechende Fläche (12), d. i. diejenige Fläche, welche in der Gleichung (1) oder (12) zu dem Parameter λ gehört, in dem neuen Koordinaten-Anfangspunkte berührt. Da dasselbe für die beiden andern Werte $\tau = \mu$ und $\tau = \nu$ gilt, und da die singulären Ebenen mit den neuen Koordinatenebenen zusammenfallen, so sehen wir wieder, daſs durch den Punkt drei Flächen der Schar gehen, daſs diese einander

rechtwinklig schneiden und dafs die Schnittlinien von je zwei Tangentialebenen die Axen für alle Tangentialkegel sind, die von dem Punkte ausgehen. Die Form der Gleichung (13) führt uns aber auf einen wichtigen weiteren Satz. Wir haben gesehen, dafs durch den ausgewählten Punkt diejenigen drei Flächen gehen, deren Parameter λ, μ, ν sind; diese gehen aber auch in die Gleichung (13) ein. Daraus ergiebt sich:

Wenn λ, μ, ν die Parameter derjenigen drei konfokalen Flächen sind, welche durch einen gegebenen Punkt gehen, so kann man dem Tangentialkegel, welcher von dem Punkte aus an die durch den Parameter τ bestimmte Fläche der Schar geht, in Hesseschen Ebenenkoordinaten die Gleichung (13) geben, indem man als neue Koordinatenebenen diejenigen Ebenen wählt, von denen je eine der drei durch den Punkt gehenden konfokalen Flächen in diesem Punkte berührt wird.

17. Eine Ausnahme können die aufgestellten Sätze nur dann erleiden, wenn zwei der Koefficienten λ, μ, ν einander gleich sind. Wenn z. B. $\lambda = \mu$ ist, so nimmt die Gleichung (13) die Gestalt an:

$$(14) \quad t = 0, \ (\lambda - \tau)(u^2 + v^2) + (\nu - \tau) w^2 = 0;$$

sie stellt einen Rotationskegel dar, dessen Umdrehungsaxe die neue z-Axe ist.

Zugleich geht aber die Gleichung (12) für $\tau = \lambda$ über in

$$(15) \quad tA + (\nu - \lambda) w^2 = 0.$$

Da diese Gleichung aus der allgemeinen Gleichung der konfokalen Flächen für einen speciellen Wert von τ erhalten wird, zugleich aber nur drei lineare Ausdrücke: t, w, A enthält, so entspricht ihr eine der Schar angehörende Grenzfläche, eine Fokalkurve der Schar. Nun haben wir aber soeben gesehen, dafs zu den Werten λ, μ, ν diejenigen Flächen gehören, welche durch den neuen Anfangspunkt gehen; dieser Punkt liegt also auf der Fokalkurve (15). Da zudem diese Kurve durch die neue z-Axe, die Rotationsaxe des Kegels (14) berührt wird, so können wir den Satz aufstellen:

Die Rotationsaxen für alle geraden Kegel, welche eine gegebene Fläche zweiter Ordnung berühren, umhüllen als Tangenten die beiden Fokalkurven. Der

Berührungspunkt einer jeden Tangente ist der Mittelpunkt desjenigen Kegels, der diese Tangente zur Axe hat.

18. Besonderes Interesse gewährt es, diesen Satz auf die beiden Fokalkurven selbst anzuwenden. Der von einem Punkte aus an einen Kegelschnitt gelegte Tangentialkegel ist stets derjenige Kegel, welcher den Kegelschnitt enthält. Wollen wir also die Kreiskegel erhalten, welche durch einen Kegelschnitt gelegt werden können, so haben wir den Kegelschnitt als Fokalkurve in einer Schar konfokaler Flächen zu betrachten. Dann bleibt der letzte Satz bestehen, nach welchem die Spitze nur auf einer Fokalkurve der Schar liegen kann. Im vorliegenden Falle müssen wir von der Kurve selbst absehen, weil für ihre Punkte der Kegel in eine Ebene übergeht. Somit liegen die Spitzen der Rotationskegel auf der zugeordneten Fokalkurve.

Jeder Kegelschnitt liegt auf unendlich vielen geraden Kreiskegeln. Die Spitzen aller dieser Kegel gehören einem zweiten Kegelschnitte an, und dieser wird von den Rotationsaxen berührt. Umgekehrt sind die Spitzen und Axen aller dem zweiten Kegelschnitte umgeschriebenen Rotationskegel Punkte und Tangenten des ersten Kegelschnittes.

19. Wir haben vorhin gesehen, dafs eine Ellipse und eine Hyperbel Fokalkurven für konfokale Mittelpunktsflächen, und zwei Parabeln Fokalkurven für alle Paraboloide sind. Wir können daher den soeben ausgesprochenen Satz in folgender Weise specialisieren:

Im Raume gehört mit jeder Ellipse eine bestimmte Hyperbel und mit jeder Hyperbel eine bestimmte Ellipse in der Weise zusammen, dafs jeder durch eine dieser Kurven gelegte Rotationskegel seinen Scheitel auf der andern hat. Die beiden Kurven haben die grofse Axe gemein, und ihre Ebenen stehen auf einander senkrecht. Die Brennpunkte der einen sind die Scheitel der andern.

Mit einer jeden Parabel gehört im Raume eine bestimmte zu ihr kongruente Parabel in der Weise zusammen, dafs jeder gerade Kreiskegel, der die eine der beiden Parabeln enthält, seinen Scheitel auf der andern hat. Die beiden Parabeln haben die Axe gemein, ihre Ebenen stehen auf einander senkrecht, und der Brennpunkt der einen ist der Scheitel der andern.

20. Indem wir eine beliebig gegebene Gerade zur z-Axe eines rechtwinkligen Koordinaten-Systems nehmen, können wir bei passender Wahl der xz- und der yz-Ebene erreichen, dafs die Fläche (1) in den zugehörigen Hesseschen Koordinaten sich durch die Gleichung darstellt:

$$Aw + Bt + \delta u^2 + \varepsilon v^2 = 0,$$

wo A und B lineare Ausdrücke in (u, v, w, t) sind. Hiernach geht die Gleichung (3) über in

$$Aw + Bt + (\delta - \tau)\, u^2 + (\varepsilon - \tau)\, v^2 - \tau w^2 = 0.$$

Es ändert sich also nur der Koefficient von w in A, sowie die Koefficienten δ und ε. Wenn $\delta \neq \varepsilon$ ist, so sind die Ebenen $t = u = w = 0$ und $t = v = w = 0$ Tangentialebenen an die beiden Flächen der Schar, von denen die Gerade g berührt wird. Wenn aber $\delta = \varepsilon$ ist, so liegt die z-Axe auf der zum Parameter δ gehörenden Fläche, und die Ebenen $w = t = 0$, $u^2 + v^2 = 0$ sind gemeinschaftliche Tangentialebenen an alle Flächen der Schar.

Übungen:

1) Die mit einer Kugel konfokalen Flächen sind die konzentrischen Kugeln. Alle diese berühren einander längs des unendlichfernen Kugelkreises; sie bilden demnach zugleich einen Büschel und eine Schar.

2) Man untersuche die Flächenschar, welche durch konfokale Rotationsflächen zweiter Ordnung gebildet wird. Der Einfachheit wegen lege man die Gleichung (6) bezw. (9) zu Grunde und nehme an, dafs zwei Koefficienten gleich sind.

3) Wie ändern sich die im Paragraphen angegebenen Sätze, wenn man statt eines eigentlichen einen uneigentlichen Punkt nimmt?

a) Wieviel Flächen der Schar gehen durch einen solchen Punkt hindurch? Was wird aus den Ebenen, welche je eine der hindurchgehenden konfokalen Flächen in dem Punkte berühren?

b) Was wird aus den Tangentialkegeln, wenn ihr Scheitel der unendlichfernen Ebene angehört?

c) Haben auch diese Kegel gemeinsame Brennstrahlen? Wie liegen dieselben zu den drei in a) angegebenen Tangentialebenen?

d) Speciell bestimme man die Eigenschaften der Tangentialkegel, welche von einem unendlichfernen Punkte der Fokalhyperbel ausgehen.

e) Die an eine Schar konfokaler Flächen zweiter Ordnung gelegten Berührungscylinder, welche auf einer festen Ebene senkrecht stehen, sind selbst konfokal.

f) Die Umrisse der orthogonalen Projektionen eines Systems von konfokalen Flächen auf irgend eine feste Ebene sind konfokale Kegelschnitte.

g) Die Umrisse der orthogonalen Projektionen einer Schar von konfokalen Flächen auf eine Ebene, welche zu einer Asymptote der Fokalhyperbel senkrecht steht, sind konzentrische Kreise.

h) Kann derjenige Cylinder, welcher eine ungleichaxige Fläche zweiter Ordnung längs eines durch den Mittelpunkt gehenden Kreisschnittes berührt, ein gerader Cylinder sein?

i) Kann überhaupt ein Kegel, welcher eine ungleichaxige Fläche zweiter Ordnung längs eines Kreises berührt, ein Rotationskegel sein?

4) a) Die beiden von einem Punkte ausgehenden Erzeugenden einer Fläche zweiter Ordnung sind Brennstrahlen für jeden Kegel, welcher von dem Punkte aus an eine beliebige konfokale Fläche gelegt werden kann.

b) Jede Erzeugende einer Fläche zweiter Ordnung ist Träger einer orthogonalen Ebenen-Involution in Bezug auf jede mit der gegebenen konfokale Fläche.

c) Wenn umgekehrt eine gerade Linie die Eigenschaft hat, dafs je zwei hindurchgehende Ebenen, welche konjugierte Polarebenen in Bezug auf eine gegebene Fläche zweiter Ordnung sind, auf einander senkrecht stehen, so läfst sich durch sie eine konfokale Fläche hindurchlegen.

d) Wenn eine gerade Linie Brennstrahl ist für einen Kegel, der eine gegebene Fläche zweiter Ordnung berührt, so werden alle durch sie hindurchgehenden Ebenen von einer und derselben konfokalen Fläche berührt; auf dieser Fläche liegt auch der zweite Brennstrahl jenes Kegels.

e) Sobald eine gerade Linie Brennstrahl ist für einen Tangentialkegel an eine gegebene Fläche zweiter Ordnung, so ist er Brennstrahl an jeden Kegel, welcher von einem ihrer Punkte aus an die Fläche gelegt werden kann.

f) Legt man von den beiden (imaginären) Geraden aus, welche den unendlichfernen Kugelkreis in den (imaginären) Schnitt-

punkten mit einer reellen Ebene berühren, die Tangentialebenen an eine Fläche zweiter Ordnung, so sind diese allen konfokalen Flächen gemeinsam und schneiden einander in zwei reellen Geraden, durch welche sich wiederum eine mit der gegebenen konfokale Fläche legen läfst. Wie liegen diese beiden Geraden zu der ausgewählten Ebene?

g) Die in a) angegebenen Geraden bilden eine zweifache Unendlichkeit. Durch jeden Punkt gehen zwei derartige Linien und auf jeder Ebene liegen entweder zwei solche Linien oder keine. Die Bestimmung der von einem Punkte ausgehenden Linien dieser Art hängt von einer Gleichung sechsten, die Bestimmung der in einer Ebene liegenden Geraden von einer Gleichung zweiten Grades ab. Die Gleichung sechsten Grades läfst sich zurückführen auf eine Gleichung dritten Grades mit drei reellen Wurzeln und auf quadratische Gleichungen.

5) a) Die beiden Kegel, welche von einem beliebigen Punkte des Raumes aus an die beiden zusammengehörigen Fokalkurven gelegt werden können, sind zu einander konfokal.

b) Können diese Kegel identisch werden?

c) Läfst sich überhaupt durch die beiden Kurven eine Fläche zweiter Ordnung legen?

6) a) Sucht man in Bezug auf einen Flächenbüschel zweiter Ordnung für jeden Punkt einer geraden Linie die gemeinsame Polare, so liegen diese auf einer Fläche zweiter Ordnung.

b) Sucht man in Bezug auf eine Flächenschar zweiter Klasse für jede Ebene eines Büschels die zugehörige gemeinsame Polare, so liegen diese auf einer Fläche zweiter Klasse.

c) Jede Gerade, welche zu einer Ebene in Bezug auf eine Schar konfokaler Flächen gemeinsame Polare ist, ist Normale an eine Fläche der Schar.

(Die Ebene wird von einer Ebene der Schar berührt; die auf dieser Ebene in ihrem Berührungspunkte errichtete Senkrechte ist mit der gegebenen Geraden identisch.)

d) Jede Normale an eine Fläche dieser Schar ist gemeinsame Polare zu der zugehörigen Tangentialebene in Bezug auf alle Flächen der Schar.

e) Legt man durch eine gerade Linie die Tangentialebenen an eine Schar konfokaler Flächen zweiter Ordnung und bestimmt

zu jeder dieser Ebenen die zugehörige Normale, so erzeugen diese eine Fläche zweiter Klasse.

(Durch d) auf b) zurückzuführen.)

f) Die Schnittpunkte der in e) gefundenen Fläche mit der gegebenen Geraden sind die Punkte, in denen die Gerade je von einer Fläche der Schar berührt wird.

g) Die Fläche ist i. a. ein hyperbolisches Paraboloid.

(Man beachte diejenige Gerade der unendlichfernen Ebene, welche in Bezug auf den Kugelkreis die Polare des unendlichfernen Punktes der gegebenen Geraden ist.)

h) Wenn die in e) angegebene Gerade Normale an eine Fläche der Schar ist, so liegen die Normalen in einer Ebene und umhüllen eine Parabel.

i) Welche Besonderheit zeigt die in e) angegebene Fläche in dem Falle, dafs die Gerade auf einer Fläche der Schar liegt?

7) a) Die Quadrate der vom gemeinsamen Mittelpunkte zweier konfokalen Flächen zweiter Ordnung auf zwei parallele Tangentialebenen derselben gefällten Senkrechten haben eine konstante Differenz.

(Denkt man sich in den Gleichungen (5) und (6) u, v, w je gleich, aber t verschieden, so folgt $t^2 - t'^2 = \tau$.)

b) Bei zwei konfokalen Paraboloiden liefert der Abstand von irgend zwei parallelen Tangentialebenen gleiche Projektionen auf die Axe.

c) Alle Tangentialebenen an den Asymptotenkegel eines Hyperboloids schneiden aus einem festen konfokalen Ellipsoid flächengleiche Ellipsen aus.

(Ist die Gleichung (5) die eines Ellipsoids, (6) die eines Hyperboloids, so gelten für die Tangentialebenen des Asymptotenkegels die Gleichungen: $t = 0$, $\lambda = \alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2$. Nach a) ist λ das Quadrat des Abstandes der parallelen Tangentialebene an das Ellipsoid. Jetzt folgt die Behauptung aus Üb. 7) e) zu § 31.)

d) Irgend drei zu einander senkrechte Ebenen, welche drei feste konfokale Mittelpunktsflächen berühren, schneiden sich auf einer bestimmten konzentrischen Kugel.

(Aus $t^2 = \alpha u^2 + \ldots$, $t'^2 = (\alpha - \lambda) u'^2 + \ldots$, $t''^2 = (\alpha - \mu) u''^2 + \ldots$ und $u^2 + u'^2 + u''^2 = 1$ u. s. w. folgt $t^2 + t'^2 + t''^2 = \alpha + \beta + \gamma - \lambda - \mu$.)

e) Irgend drei zu einander senkrechte Ebenen, welche drei feste konfokale Paraboloide berühren, schneiden einander in einer bestimmten zur Axe senkrechten Ebene.

(Man lasse in d) den Mittelpunkt auf einer festen Geraden immer weiter fortrücken und suche die Grenzlage. Statt dessen kann man auch die Gleichungen (8) und (9), letztere für λ und μ, mit den Gleichungen zusammenstellen: $ux + \ldots + t = 0$, $u'x + \ldots + t = 0$, $u''x + \ldots + t = 0$.)

8) a) Die Kreiskegel, welche sich an die Fläche (5) legen lassen, können auch in folgender Weise gefunden werden. Alle Flächen zweiter Klasse, welche durch den vom Punkte $A = 0$ an die Fläche $F(u \ldots t) = 0$ gelegten Tangentialkegel berührt werden, lassen sich durch die Gleichung darstellen: $F + \varkappa AB = 0$, wo B ein beliebiger zweiter Ausdruck ersten Grades in u, v, w, t ist. Soll jener Tangentialkegel ein gerader sein, so mufs sich eine Kugel bestimmen lassen, welche von dem Kegel ringsum berührt wird; bei passender Wahl des Faktors $\varkappa$ und der Koefficienten in B stellt dann die letzte Gleichung eine Kugel dar. Ist also $C = 0$ die Gleichung eines dritten Punktes (des Mittelpunktes) in der Normalform, r der Radius der Kugel, $A = 0$ die Spitze eines geraden Tangentialkegels an die Fläche (5), so mufs die identische Gleichung bestehen:

$$(\alpha) \quad \alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2 - t^2 + \varkappa AB = \varrho\,[C^2 - r^2 (u^2 + v^2 + w^2)].$$

b) Von jedem Punkte aus, von dem ein gerader Tangentialkegel an eine Fläche zweiter Ordnung ausgeht, läfst sich auch ein gerader Berührungskegel an jede konfokale Fläche legen.

(Die Gleichung (α) bleibt richtig, wenn man α, β, γ bezw. durch $\alpha - \tau$, $\beta - \tau$, $\gamma - \tau$ und zugleich ϱr^2 durch $\varrho r^2 + \tau$ ersetzt.)

c) Damit die Gleichung (α) befriedigt wird, mufs die Gleichung

$$(\beta) \quad (\alpha + \varrho r^2) u^2 + (\beta + \varrho r^2) v^2 + (\gamma + \varrho r^2) w^2 - t^2 = 0$$

eine Grenzfläche darstellen.

(Die linke Seite der letzten Gleichung ist gleich $\varrho C^2 - \varkappa AB$.)

d) Der Scheitel eines jeden geraden Berührungskegels liegt auf einer Fokalkurve der Fläche, und umgekehrt ist der Tangentialkegel, der von einem Punkte einer Fokalkurve ausgeht, ein gerader.

(Wegen c) gehört der Punkt $A = 0$ dem Kegelschnitte (β) an; diese Gleichung kann aber nur dann eine Grenzfläche darstellen, wenn entweder $\alpha + \varrho r^2$ oder $\beta + \varrho r^2$ oder $\gamma + \varrho r^2$ gleich null ist.)

e) Die Rotationsaxe eines solchen Kegels berührt eine Fokalkurve.

(Die Gerade $A = 0$, $C = 0$ verbindet den Scheitel des Kegels mit dem Mittelpunkte der berührenden Kugel, ist also Rotationsaxe.)

f) Man beweise in ähnlicher Weise die entsprechenden Sätze für ein Paraboloid.

g) Welche Vorzüge hat die im Paragraphen selbst durchgeführte Entwicklung vor der hier mitgeteilten?

9) a) Die Gleichung eines Kegelschnittes kann auf die Form gebracht werden: $AB + \varkappa C^2 = 0$, wo A, B, C lineare Formen in u . . . t sind. Soll dieser Kegelschnitt die Fokalellipse (7) sein, so mufs die linke Seite der vorstehenden Gleichung bis auf einen konstanten Faktor gleich sein der linken Seite in der letzten Gleichung (7). Demnach ist auch

$$\gamma(1 + \varkappa)(u^2 + v^2 + w^2) - AB = (1 + \varkappa)(\alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2 - t^2) + \varkappa C^2.$$

Die rechte Seite stellt, gleich null gesetzt, eine Fläche dar, welche von der Fläche (5) längs eines Kegelschnittes berührt wird, während die linke Seite zeigt, dafs diese Fläche eine Umdrehungsfläche mit den Brennpunkten $A = 0$, $B = 0$ ist. Somit folgt der Satz:

Zwei beliebige Punkte einer Fokalkurve einer Fläche zweiter Ordnung können zu Brennpunkten einer Umdrehungsfläche gewählt werden, von der die gegebene Fläche ringsum berührt wird.

(Man führe den Beweis für die verschiedenen Arten von Flächen durch.)

b) Durch eine gegebene Kurve zweiter Ordnung läfst sich eine Umdrehungsfläche legen, welche zwei beliebige Punkte der zugehörigen Fokalkurve zu Brennpunkten hat.

(Man ersetze die Fläche (5) durch eine Fokalkurve der Schar.)

c) Jede Umdrehungsfläche, welche durch einen gegebenen Kegelschnitt hindurchgeht, hat ihre Brennpunkte auf dem zugehörigen Fokalkegelschnitte.

d) Unendlich viele Punktepaare haben die Eigenschaft, dafs

die Summe oder Differenz der Strecken, welche von ihnen aus nach den sämtlichen Punkten eines vorgelegten Kegelschnittes gezogen werden können, konstant sind; nur müssen die Punkte des Paares auf der zugehörigen Fokalkurve gewählt werden. Wann ist die Summe, wann die Differenz der Strecken konstant?

e) Läfst sich durch einen Kegelschnitt auch eine Umdrehungsfläche legen, deren Brennpunkte imaginär sind?

f) Welche Veränderung hat man mit dem in d) angegebenen Satze vorzunehmen, wenn man einen der beiden ausgewählten Punkte unendlichfern annimmt?

§ 36.

Die konfokalen Flächen zweiter Ordnung in Punktkoordinaten.

1. Die Gleichungen (5) und (6) des vorigen Paragraphen nehmen für Punktkoordinaten die Form an:

$$(1)\quad \frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}+\frac{z^2}{\gamma}=1,$$

$$(2)\quad \frac{x^2}{\alpha-\tau}+\frac{y^2}{\beta-\tau}+\frac{z^2}{\gamma-\tau}=1.$$

Die zweite Gleichung stellt demnach alle Flächen dar, welche mit der ersten Fläche konfokal sind.

Wir erinnern nochmals daran, dafs die Gleichung (2) für $\tau > \alpha$ eine imaginäre Fläche, für $\alpha > \tau > \beta$ ein zweischaliges, für $\beta > \tau > \gamma$ ein einschaliges Hyperboloid und für $\gamma > \tau$ ein Ellipsoid darstellt. Für die Grenzflächen haben wir jetzt jedesmal zwei Gleichungen nötig, nämlich

$$(4)\quad \begin{aligned} x&=0,\ \frac{y^2}{\beta-\alpha}+\frac{z^2}{\gamma-\alpha}=1\\ y&=0,\ \frac{x^2}{\alpha-\beta}+\frac{z^2}{\gamma-\beta}=1.\\ z&=0,\ \frac{x^2}{\alpha-\gamma}+\frac{y^2}{\beta-\gamma}=1 \end{aligned}$$

Für die Schnittpunkte der Fläche (1) mit der Fokalhyperbel erhalten wir die Koordinaten

$$(5)\quad y=0,\ x^2=\frac{\alpha(\alpha-\beta)}{\alpha-\gamma},\ z^2=\frac{\gamma(\beta-\gamma)}{\alpha-\gamma},$$

und für die Schnittpunkte mit der Fokalellipse:

$$(6)\quad z = 0,\ x^2 = \frac{\alpha(\alpha-\gamma)}{\alpha-\beta},\ y^2 = -\frac{\beta(\beta-\gamma)}{\alpha-\beta}.$$

Es sind das dieselben Werte, die wir in § 34 für die Koordinaten der Kreispunkte erhalten haben. Für $\alpha > \beta > \gamma > 0$ liefern die Gleichungen (5), für $\alpha > 0 > \beta > \gamma$ die Gleichungen (6) reelle Werte, während für $\alpha > \beta > 0 > \gamma$ weder den Gleichungen (5) noch den Gleichungen (6) reelle Werte genügen.

Das Ellipsoid wird von der Fokalhyperbel, das zweischalige Hyperboloid von der Fokalellipse in vier Punkten geschnitten; das einschalige Hyperboloid hat mit keiner Fokalkurve einen Punkt gemein. Die Schnittpunkte einer Fläche mit ihrer Fokalkurve sind jedesmal die Kreispunkte der Fläche.

2. Indem wir die Gleichung (2) mit dem gemeinsamen Nenner multiplizieren, nimmt sie die Form an:

$$(7)\quad x^2(\beta-\tau)(\gamma-\tau) + y^2(\alpha-\tau)(\gamma-\tau) + z^2(\alpha-\tau)(\beta-\tau) - (\alpha-\tau)(\beta-\tau)(\gamma-\tau) = 0.$$

Wofern hier die drei Werte x, y, z von null verschieden sind, erhält die linke Seite für $\tau = \alpha$ den positiven Wert $x^2(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)$, für $\tau = \beta$ den negativen Wert $y^2(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)$, für $\tau = \gamma$ den positiven Wert $z^2(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)$ und für sehr grofse negative Werte von τ einen negativen Wert. Für ein gegebenes Wertsystem x, y, z hat also die Gleichung (7), oder was dasselbe ist, die Gleichung (1) drei verschiedene reelle Wurzeln λ, μ, ν, welche der Bedingung genügen:

$$(8)\quad \alpha > \lambda > \beta > \mu > \gamma > \nu.$$

Wir erkennen hieraus, was wir schon im vorigen Paragraphen gesehen haben, dafs durch jeden Punkt, der keiner Hauptebene angehört, drei Flächen der Schar gehen; aufserdem zeigt sich hier aber, dafs die eine der drei Flächen ein Ellipsoid, die zweite ein einschaliges und die dritte ein zweischaliges Hyperboloid ist.

3. Da die Gleichung (7) die drei Wurzeln λ, μ, ν besitzt und ihre höchste Potenz den Koefficienten eins hat, so ist, wie die Algebra lehrt, identisch

$$x^2(\beta-\tau)(\gamma-\tau) + y^2(\alpha-\tau)(\gamma-\tau) + z^2(\alpha-\tau)(\beta-\tau) - (\alpha-\tau)(\beta-\tau)(\gamma-\tau) = (\tau-\lambda)(\tau-\mu)(\tau-\nu).$$

Diese Gleichung wird befriedigt für jeden beliebigen Wert, den wir der Gröfse τ geben. Es empfiehlt sich, beiderseits τ der Reihe nach gleich α, β, γ zu setzen. Alsdann erhalten wir die Gleichungen:

$$(9)\quad \begin{aligned} x^2 &= \frac{(\alpha-\lambda)(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} \\ y^2 &= \frac{(\beta-\lambda)(\beta-\mu)(\beta-\nu)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} \\ z^2 &= \frac{(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen stellen die Auflösungen der drei Gleichungen dar, welche aus (2) erhalten werden, indem man für τ die drei Wurzeln λ, μ, ν setzt, welche diese Gleichung für ein gegebenes Wertsystem x, y, z besitzt. Es sind das lineare Gleichungen in x^2, y^2, z^2; ihre Auflösung kann also nach den bekannten Methoden erfolgen. Aber alsdann bedarf es mancher Umformung, ehe man die einfachen Resultate erhält, welche durch die Gleichungen (9) angegeben werden. Der hier eingeschlagene Weg liefert aber die einfachsten Formeln unmittelbar ohne jede Rechnung.

4. Die Gleichungen (9) gestatten uns, die Koordinaten x, y, z bis auf das Vorzeichen zu berechnen, sobald aufser den drei festen Konstanten α, β, γ die Gröfsen λ, μ, ν gegeben sind. Kennt man noch den Oktanten, in welchem der Punkt liegt, so ist seine Lage durch die Gröfsen λ, μ, ν vollständig bestimmt. Die Benutzung dieser Gröfsen bietet bei vielen Problemen der Geometrie, namentlich für die Untersuchung von Linien, die auf einem Ellipsoid liegen, ganz besondere Vorteile; man nennt sie deshalb elliptische Koordinaten. Es sind dies die Parameter der drei mit der gegebenen Fläche konfokalen Flächen, welche durch den zu bestimmenden Punkt gehen.

5. Wir haben schon oben gesehen, dafs $\nu < \gamma$ sein, μ zwischen β und γ, λ zwischen α und β liegen mufs. Auch zeigen die Gleichungen (9), dafs jedesmal, wenn die drei Parameter λ, μ, ν diesen Bedingungen genügen, die Werte von x^2, y^2, z^2 positiv sind. Es lohnt sich aber der Mühe, nachzuweisen, dafs unter der Annahme $\alpha > \beta > \gamma$ und $\lambda > \mu > \nu$ die Gleichungen (9) nur dann reelle Werte für x, y, z liefern, wenn λ, μ, ν zwischen

den angegebenen Grenzen liegen. Alsdann müssen nämlich die Produkte $(\alpha - \lambda)\ (\alpha - \mu)\ (\alpha - \nu)$ und $(\gamma - \lambda)\ (\gamma - \mu)\ (\gamma - \nu)$ positiv, das Produkt $(\beta - \lambda)\ (\beta - \mu)\ (\beta - \nu)$ negativ sein. Demnach mufs $\gamma > \nu$ sein, weil im andern Falle die drei Faktoren $\gamma - \lambda$, $\gamma - \mu$, $\gamma - \nu$ negativ wären. Mit $\gamma - \nu$ sind aber auch die Gröfsen $\alpha - \nu$ und $\beta - \nu$ positiv; also müssen $\beta - \lambda$ und $\beta - \mu$ entgegengesetztes Vorzeichen haben oder es mufs $\lambda > \beta > \mu$ sein. Da hiernach auch $\lambda > \gamma$ ist und $\gamma - \lambda$ und $\gamma - \mu$ dasselbe Vorzeichen haben, ist $\mu > \gamma$. Aus $\beta > \mu$ folgt $\alpha > \mu$; daher mufs auch $\alpha > \lambda$ sein. Die Bedingungen (8) müssen also erfüllt sein, wenn die Gleichungen (9) reelle Werte für x, y, z liefern sollen.

6. Schon aus den Grenzen für die Wurzeln der Gleichung (2) geht hervor, dafs durch jeden Punkt, der auf keiner Koordinatenebene liegt, nur ein einziges Ellipsoid geht. Zudem haben wir soeben gesehen, dafs bei keinem Werte von λ die Ausdrücke für x^2, y^2, z^2 positiv sein können, falls μ und ν beide kleiner sind als γ. Somit können sich konfokale Ellipsoide niemals schneiden. Wenn dagegen $\nu < \gamma$ und $\beta > \mu > \gamma$ für feste Werte μ und ν ist, so können wir der Gröfse λ noch jeden Wert geben, der zwischen α und β liegt, und erhalten jedesmal reelle Werte für x, y, z; somit hat jedes Ellipsoid mit einem beliebigen konfokalen einschaligen Hyperboloid eine Linie gemeinschaftlich. Ebenso darf man, nachdem ν und λ derartig fest gewählt sind, dafs $\nu < \gamma$ und $\alpha > \lambda > \beta$ ist, noch der Gröfse μ jeden Wert zwischen β und γ beilegen; es schneidet sich also auch jedes zweischalige Hyperboloid mit einem beliebigen konfokalen Ellipsoid. Die gleiche Betrachtung können wir auch für die andern Flächenarten anstellen, indem wir λ einen festen Wert zwischen α und β, μ einen festen Wert zwischen β und γ beilegen. Diese Betrachtung führt zu dem Satze:

Zwei konfokale Flächen derselben Art haben keinen Punkt gemeinschaftlich, dagegen schneiden sich zwei konfokale Flächen verschiedener Art jedesmal in einer reellen Kurve.

7. Wenn die Koordinaten x, y, z den beiden Gleichungen genügen:

$$(10)\quad \frac{x^2}{\alpha-\lambda}+\frac{y^2}{\beta-\lambda}+\frac{z^2}{\gamma-\lambda}=1$$
$$\frac{x^2}{\alpha-\mu}+\frac{y^2}{\beta-\mu}+\frac{z^2}{\gamma-\mu}=1,$$

so folgt durch Subtraktion unter Weglassung des Faktors $\lambda-\mu$ die neue Gleichung:

$$(11)\quad \frac{x^2}{(\alpha-\lambda)(\alpha-\mu)}+\frac{y^2}{(\beta-\lambda)(\beta-\mu)}+\frac{z^2}{(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)}=0.$$

Diese Gleichung hat eine wichtige geometrische Bedeutung. Um dieselbe zu finden, stellen wir die Gleichungen der Ebenen auf, von denen die Flächen (10) im Punkte (x, y, z) berührt werden. Indem wir mit X, Y, Z beliebige Punkte auf einer dieser Ebenen bezeichnen, erhalten wir für die Ebenen die Gleichungen:

$$\frac{Xx}{\alpha-\lambda}+\frac{Yy}{\beta-\lambda}+\frac{Zz}{\gamma-\lambda}=1$$
$$\frac{Xx}{\alpha-\mu}+\frac{Yy}{\beta-\mu}+\frac{Zz}{\gamma-\mu}=1.$$

Die Richtungscosinus ε, ε', ε'' der zur ersten Ebene errichteten Senkrechten verhalten sich wie

$$\frac{x}{\alpha-\lambda}:\frac{y}{\beta-\lambda}:\frac{z}{\gamma-\lambda},$$

und die Richtungscosinus η, η', η'' für die auf der zweiten Ebene errichteten Senkrechten wie

$$\frac{x}{\alpha-\mu}:\frac{y}{\beta-\mu}:\frac{z}{\gamma-\mu}.$$

Demnach geht die Gleichung (11) in die folgende über:

$$\varepsilon\eta+\varepsilon'\eta'+\varepsilon''\eta''=0,$$

und diese sagt aus, dafs die angegebenen Senkrechten und damit die Tangentialebenen selbst auf einander senkrecht stehen.

Zwei konfokale Flächen schneiden einander überall rechtwinklig.

8. Der Schnitt zweier konfokaler Flächen zweiter Ordnung wird als eine Krümmungslinie bezeichnet. Eine auf einem Ellipsoid gelegene Krümmungslinie wird entweder durch den Schnitt mit einem einschaligen oder durch den Schnitt mit einem zweischaligen Hyperboloid erhalten. Indem man als gleichartige Krümmungslinien solche bezeichnet, welche den Schnitt gleichartiger

Flächen bilden, und indem man gleichartige Krümmungslinien derselben Schar zuordnet, erkennt man, daſs auf jeder Fläche zweiter Ordnung zwei Scharen von Krümmungslinien liegen. Krümmungslinien derselben Schar können einander nicht schneiden, da sie gleichartigen konfokalen Flächen angehören; dagegen müssen Krümmungslinien verschiedener Art acht Punkte gemeinschaftlich haben. Aus dem zuletzt bewiesenen Satze geht unmittelbar hervor, daſs auch schneidende Krümmungslinien rechtwinklig zu einander geneigt sind. Ebenso ist sofort klar, daſs durch jeden Punkt der Fläche zwei auf ihr gelegene Krümmungslinien gehen, welche verschiedenen Scharen angehören.

Auf jeder Fläche zweiter Ordnung giebt es zwei Scharen von Krümmungslinien. Krümmungslinien derselben Schar haben keinen Punkt gemeinschaftlich; aber Krümmungslinien von verschiedenen Scharen schneiden einander immer, und zwar überall rechtwinklig. Durch jeden Punkt der Fläche gehen zwei ihrer Krümmungslinien hindurch.

Man sagt auch wohl: Die beiden Scharen der Krümmungslinien, welche auf einer Fläche zweiter Ordnung gezogen werden können, zerlegen die Fläche in lauter unendlich kleine Rechtecke.

9. In § 35, 16 haben wir in Ebenenkoordinaten die Gleichung desjenigen Kegels aufgestellt, welcher von einem festen Punkte aus an eine beliebige Fläche der Schar gelegt werden kann. Zu Koordinatenebenen wählten wir dabei die Berührungsebenen der drei durch den Punkt gehenden konfokalen Flächen. Gehen wir von den dort benutzten Ebenenkoordinaten zu den zugehörigen Punktkoordinaten über, so haben wir die beiden dort gefundenen Gleichungen durch die folgende zu ersetzen:

$$(12)\quad \frac{\xi^2}{\lambda-\tau}+\frac{\eta^2}{\mu-\tau}+\frac{\zeta^2}{\nu-\tau}=0.$$

Wenn ein Punkt die elliptischen Koordinaten λ, μ, ν hat, so ist (12) die Gleichung des von ihm an diejenige konfokale Fläche gelegten Tangentialkegels, welche den Parameter τ hat, wofern man die Tangentialebenen an die drei durch den Punkt gehenden konfokalen Flächen zu Koordinatenebenen wählt.

Auch die Gleichung (12) kann man benutzen, um einige von

den im vorigen Paragraphen entwickelten Sätzen herzuleiten. Indessen ist es nicht nötig, darauf nochmals einzugehen. Nur daran wollen wir erinnern, dafs wegen der für die Gröfsen λ, μ, ν angegebenen Grenzen die Gleichung (12) nur dann einen geraden Kegel darstellt, wenn entweder $\lambda = \mu = \beta$ oder $\mu = \nu = \gamma$ ist, wenn also der Scheitel auf einer der beiden Fokalkurven liegt.

Übungen:

1) a) Während die Tangentialkegel, welche von einem beliebigen Punkte aus an konfokale Flächen gelegt werden können, selbst konfokal sind, bilden die Schnittlinien mit einer Ebene im allgemeinen keine konfokale Schar.

b) Wenn zwei Flächen zweiter Ordnung dieselben Hauptebenen haben und von ihnen in konfokalen Kegelschnitten geschnitten werden, so sind sie selbst konfokal.

2) Man soll diejenigen Punkte finden, von denen aus sich reelle Umdrehungskegel an eine vorgelegte Fläche zweiter Ordnung legen lassen.

a) Die Punkte liegen beim Ellipsoid auf vier unendlichen Zweigen der Fokalhyperbel, während die Fokalellipse und zwei Bogen der Fokalhyperbel auszuschliefsen sind.

b) Beim zweischaligen Hyperboloid liegen die Punkte auf zwei Bogen der Fokalellipse; zwei andere Bogen dieser Kurve und die Fokalhyperbel liefern imaginäre Kegel. Für welche Punkte wird der Winkel am kleinsten, den die Axe eines geraden Tangentialkegels an die Fläche mit ihren Kanten bildet? Wie grofs ist dieser kleinste Winkel?

c) Für das einschalige Hyperboloid sind die Berührungskegel reell, die von einem beliebigen Punkte einer der beiden Fokalkurven ausgehen. Auf der Ellipse nimmt der Winkel, den die Axe mit der Kante bildet, zweimal ein Maximum und zweimal ein Minimum an; auf der Hyperbel erhalten wir zwei Maxima dieses Winkels. Man soll die Scheitel der entsprechenden Kegel und die Gröfse der Winkel bestimmen.

3) Um konfokale Paraboloide vermittelst Punktkoordinaten zu untersuchen, kann man zwei verschiedene Wege einschlagen.

a) Entweder geht man von den Gleichungen (1) und (2) aus, transformiert sie auf den Scheitel der ersten Fläche, läfst dann

den Mittelpunkt immer weiter rücken und legt die Form zu Grunde, welche die Gleichungen im Grenzfalle annehmen.

b) Oder man legt die Gleichung (8) und (9) von § 35 (S. 339) zu Grunde und stellt die Flächen in den zugehörigen Punktkoordinaten dar.

Man führe beide Wege durch und gebe beidemale zu sämtlichen in diesem Paragraphen aufgestellten Gleichungen die entsprechenden Formeln an.

4) Man beschreibe die Veränderung, welche mit der Gestalt der Fläche (2), mit der Länge der Axen u. s. w. vor sich geht, wenn der Parameter τ eine kleine Änderung erleidet. So lasse man zuerst τ einen Wert $< \gamma$ annehmen und stetig bis γ wachsen; dabei untersuche man namentlich die Gestalt der Fläche für den Fall, daſs die (positive) Gröſse $\gamma - \tau$ immer kleiner wird. Man betrachte jetzt einen beliebigen Wert zwischen β und γ und gehe von ihm aus zum Werte γ zurück. Dabei frage man sich, für welche Gebilde die Fokalellipse die Grenzlage ist, mit andern Worten, was aus dieser Kurve werde, wenn man den Parameter τ vom Werte γ aus einmal unendlich wenig zunehmen und dann unendlich wenig abnehmen läſst.

In gleicher Weise untersuche man die Veränderung der einschaligen Hyperboloide, wenn τ alle Werte von γ bis β durchläuft u. s. w.

5) a) Man zeige, daſs unendlich nahe Normalen einer Fläche zweiter Ordnung sich nur dann schneiden können, wenn die Fuſspunkte auf derselben Krümmungslinie liegen.

Jeder Punkt (ξ, η, ζ) auf der im Punkte (x, y, z) der Fläche (1) an sie errichteten Normalen wird vermittelst einer veränderlichen Gröſse σ durch die Gleichungen bestimmt:

$$\xi = x + \sigma \frac{x}{\alpha}, \quad \eta = y + \sigma \frac{y}{\beta}, \quad \zeta = z + \sigma \frac{z}{\gamma}.$$

Soll durch den Punkt (ξ, η, ζ) noch die Normale des Punktes $(x + h, y + k, z + l)$ gehen, so müssen die vorstehenden Gleichungen auch befriedigt werden, wenn man x, y, z durch $x + h$, $y + k$, $z + l$ und σ durch $\sigma + \varkappa$ ersetzt. Daher muſs sein:

$$h = \frac{\varkappa x}{\alpha + \sigma}, \quad k = \frac{\varkappa y}{\beta + \sigma}, \quad l = \frac{\varkappa z}{\gamma + \sigma}.$$

Jetzt muſs aber auch der Punkt $(x + h, y + k, z + l)$ der Gleichung (1) genügen. Daraus folgt unter Berücksichtigung des Umstandes, daſs h, k, l unendlich kleine Gröſsen sein sollen, die Gleichung

$$\frac{hx}{\alpha} + \frac{ky}{\beta} + \frac{lz}{\gamma} = 0$$

oder

$$\frac{x^2}{\alpha(\alpha+\sigma)} + \frac{y^2}{\beta(\beta+\sigma)} + \frac{z^2}{\gamma(\gamma+\sigma)} = 0$$

oder

$$\frac{x^2}{\alpha+\sigma} + \frac{y^2}{\beta+\sigma} + \frac{z^2}{\gamma+\sigma} = 1.$$

Demnach muſs $-\sigma$ einen der beiden Werte τ annehmen, welche auſser dem Werte null der Gleichung (2) genügen. Der neue Punkt liegt also in der Richtung der Normale an je eine dieser Flächen, und da die Flächen unter einander und auf der gegebenen senkrecht stehen, auf der Schnittlinie mit einer durch den Punkt gehenden konfokalen Fläche.

b) Man führe die angegebene Entwicklung in der umgekehrten Reihenfolge durch, indem man annimmt, der unendlich nahe Punkt liege in einer Krümmungslinie.

c) Der in a) benutzte Punkt (ξ, η, ζ) muſs als der Schnittpunkt unendlich naher Normalen betrachtet werden. Zu jedem Punkte der Fläche gehören zwei solche Punkte; diese werden als Krümmungsmittelpunkte und ihre Abstände vom gegebenen Punkte als Hauptkrümmungsradien bezeichnet. Man gebe die Beziehung an, in der diese beiden Radien zu den Parametern der durch den Punkt gehenden konfokalen Flächen stehen.

d) Die Normale in einem Kreispunkte wird von jeder unendlich nahen Normale geschnitten.

e) Im allgemeinen gehen durch einen Punkt des Raumes sechs Normalen an eine vorgelegte Fläche zweiter Ordnung.

(Man betrachte in a) den Punkt (ξ, η, ζ) als gegeben und drücke x, y, z vermittelst der Unbekannten σ durch ξ, η, ζ aus. Damit der Punkt (x, y, z) auf der Fläche (1) liegt, muſs σ eine Wurzel der Gleichung sein:

$$\frac{\alpha\xi^2}{(\alpha+\sigma)^2} + \frac{\beta\eta^2}{(\beta+\sigma)^2} + \frac{\gamma\zeta^2}{(\gamma+\sigma)^2} = 1.)$$

f) Durch einen unendlichfernen Punkt gehen nur zwei Normalen an eine gegebene Fläche zweiter Ordnung.

g) Wie ändern sich die angegebenen Sätze für ein Paraboloid?

6) a) Entsprechende oder korrespondierende Punkte auf gleichartigen konfokalen Flächen zweiter Ordnung sind solche Punkte desselben Oktanten, in denen die Flächen von derselben, zur Schar gehörenden Krümmungslinie geschnitten werden. Demnach bestimmen die elliptischen Koordinaten (λ, μ, ν) und (λ, μ, ν') entsprechende Punkte auf zwei Ellipsoiden der Schar.

b) Zwei Punkte auf gleichartigen konfokalen Flächen zweiter Ordnung haben dieselbe Entfernung wie die ihnen entsprechenden Punkte (Ivoryscher Satz).

Es seien (x, y, z) und (X, Y, Z) irgend zwei Punkte auf gleichartigen konfokalen Flächen; dem ersten möge der Punkt (x', y', z'), dem zweiten der Punkt (X', Y', Z') entsprechen. Wenn der Punkt (x, y, z) die elliptischen Koordinaten λ, μ, ν, der Punkt (X, Y, Z) die elliptischen Koordinaten λ', μ', ν' hat, und die Flächen etwa Ellipsoide sind, so entspricht dem Punkte (x', y', z') das Tripel λ, μ, ν' und dem Punkte (X', Y', Z') das Tripel λ', μ', ν. Daher ergeben sich aus (9) für x^2X^2 und $x'^2X'^2$, und somit auch für xX und x'X' gleiche Werte u. s. w. Berücksichtigt man noch die Werte, die sich für $x^2 + y^2 + z^2$ u. s. w. aus der Übung 7) d) zu § 35 ergeben, so folgt die Gleichung:

$$(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2 = (x' - X')^2 + (y' - Y')^2 + (z' - Z')^2.$$

c) Sind x, y, z und x_1, y_1, z_1 die Koordinaten zweier entsprechender Punkte auf zwei konfokalen Ellipsoiden, von denen das erste die Halbaxen a, b, c, das zweite die Halbaxen a_1, b_1, c_1 hat, so gelten die Gleichungen:

$$\frac{x}{x_1} = \frac{a}{a_1}, \quad \frac{y}{y_1} = \frac{b}{b_1}, \quad \frac{z}{z_1} = \frac{c}{c_1}.$$

(Nach Gleichung (9) gelten die Relationen

$$x^2 : x_1^2 = (\alpha - \nu) : (\alpha - \nu') \quad \text{u. s. w.})$$

d) Irgend zwei Punkten, die derselben Erzeugenden eines einschaligen Hyperboloids angehören, entsprechen auf einem konfokalen einschaligen Hyperboloid zwei Punkte, die ebenfalls auf

einer Erzeugenden liegen und denselben Abstand von einander haben wie die gegebenen Punkte.

(Sollen die Punkte (x, y, z) [oder (λ, μ, ν)] und (x', y', z') [oder (λ', μ, ν')] auf einer Erzeugenden der Fläche (2) für $\tau = \mu$ liegen, so müssen sie konjugierte Pole für diese Fläche sein; es mufs also die Relation bestehen:

$$\frac{xx'}{\alpha - \mu} + \frac{yy'}{\beta - \mu} + \frac{zz'}{\gamma - \mu} = 1.$$

Daraus folgt eine Beziehung zwischen λ, λ', ν, ν', die von μ unabhängig ist. Ebenso kann man die Gröfse

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

durch λ, λ', ν, ν' allein ausdrücken.)

7) Man untersuche die drei Arten von Krümmungslinien, welche durch den Schnitt konfokaler Mittelpunktsflächen erhalten werden. Zu dem Zwecke führe man die Entwicklungen durch, welche im folgenden unter der Annahme angegeben sind, dafs λ und μ feste Werte haben, aber ν veränderlich ist, und übertrage sie auf die andern beiden Fälle.

a) Indem man in den Gleichungen (9) der Gröfse ν alle Werte $< \gamma$ giebt, erkennt man, dafs die Kurve aus vier kongruenten, ins Unendliche verlaufenden Zweigen besteht, welche die xy-Ebene senkrecht durchschneiden.

b) Man untersuche die Schnittlinie der durch die Gleichungen (10) bei festen Werten von λ und μ dargestellten Flächen. Durch diese beiden Flächen lasse man einen Büschel bestimmt werden und gebe die Gestalt des ihm angehörenden Kegels und der durch die Schnittkurve gelegten Cylinder an.

c) Für diejenigen Leser, welche mit der Theorie der elliptischen Funktionen bekannt sind, möge folgendes bemerkt werden. Die Koordinaten für die Punkte einer Krümmungslinie von Flächen zweiter Ordnung hangen in sehr schöner Weise von den Weierstrafsschen σ-Funktionen ab; dabei tritt die Annehmlichkeit ein, dafs diese Funktionen für alle Krümmungslinien desselben Systems dieselben Invarianten besitzen. Man darf nämlich für einen beliebigen reellen Wert ϱ (etwa für $\varrho = 1$) setzen:

$$e_1 - e_2 = \frac{\beta - \gamma}{\varrho^2}, \quad e_2 - e_3 = \frac{\alpha - \beta}{\varrho^2}, \quad e_1 - e_3 = \frac{\alpha - \gamma}{\varrho^2},$$

also

$$e_1 = \frac{\alpha + \beta - 2\gamma}{3\varrho^2},\quad e_2 = \frac{\alpha - 2\beta + \gamma}{3\varrho^2},\quad e_3 = \frac{-2\alpha + \beta + \gamma}{3\varrho^2}.$$

Alsdann erhalten wir für die Schnittlinie der beiden Flächen (10):

$$x = \varrho \sqrt{\frac{(\alpha-\lambda)(\alpha-\mu)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}}\,\frac{\sigma_3 u}{\sigma u},\quad y = \varrho \sqrt{\frac{(\beta-\lambda)(\beta-\mu)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}}\,\frac{\sigma_2 u}{\sigma u},$$

$$z = \varrho \sqrt{\frac{(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}}\,\frac{\sigma_1 u}{\sigma u}.$$

d) Man behandle in gleicher Weise die durch den Schnitt konfokaler Paraboloide erhaltenen Krümmungslinien.

8) Eine Fläche direkt durch eine Gleichung zwischen den elliptischen Koordinaten zu bestimmen, hat meistens etwas Mifsliches. Dennoch möchten wir auf folgende Gleichungen hinweisen:

a) $\lambda = \text{Const.}$

b) $\lambda + \mu + \nu = \text{Const.}$ (Üb. 7) d) zu § 35.

c) $\lambda + \mu = \text{Const.}$

9) a) Indem man die in τ identische Gleichung:

$$1 + \frac{x^2}{\tau-\alpha} + \frac{y^2}{\tau-\beta} + \frac{z^2}{\tau-\gamma} = \frac{(\tau-\lambda)(\tau-\mu)(\tau-\nu)}{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

nach τ differentiiert und dann τ einen der drei Werte λ, μ, ν beilegt, erhält man die Gleichungen:

$$\frac{x^2}{(\alpha-\lambda)^2} + \frac{y^2}{(\beta-\lambda)^2} + \frac{z^2}{(\gamma-\lambda)^2} = \frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{(\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)} = \frac{1}{L^2}$$

$$\frac{x^2}{(\alpha-\mu)^2} + \frac{y^2}{(\beta-\mu)^2} + \frac{z^2}{(\gamma-\mu)^2} = \frac{(\mu-\lambda)(\mu-\nu)}{(\alpha-\mu)(\beta-\mu)(\gamma-\mu)} = \frac{1}{M^2}$$

$$\frac{x^2}{(\alpha-\nu)^2} + \frac{y^2}{(\beta-\nu)^2} + \frac{z^2}{(\gamma-\nu)^2} = \frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{(\alpha-\nu)(\beta-\nu)(\gamma-\nu)} = \frac{1}{N^2},$$

wo L^2, M^2, N^2 nur Abkürzungen für die danebenstehenden Funktionen von λ, μ, ν sind.

Zugleich ist N der Abstand des Mittelpunktes von der im Punkte (λ, μ, ν) an das hindurchgehende Ellipsoid gelegten Tangentialebene u. s. w.

b) Durch logarithmische Differentiation der Gleichungen (9) erhalten wir folgende Relationen:

$$2dx = \frac{x\,d\lambda}{\lambda-\alpha} + \frac{x\,d\mu}{\mu-\alpha} + \frac{x\,d\nu}{\nu-\alpha}$$

$$2dy = \frac{y d\lambda}{\lambda - \beta} + \frac{y d\mu}{\mu - \beta} + \frac{y d\nu}{\nu - \beta}$$
$$2dz = \frac{z d\lambda}{\lambda - \gamma} + \frac{z d\mu}{\mu - \gamma} + \frac{z d\nu}{\nu - \gamma}.$$

c) Indem wir diese Gleichungen quadrieren und die Gleichungen (11) des Textes, sowie die unter a) angegebenen Gleichungen beachten, erhalten wir die Gleichung:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{d\lambda^2}{L^2} + \frac{d\mu^2}{M^2} + \frac{d\nu^2}{N^2}\right).$$

d) Hiernach geben die Brüche

$$\frac{1}{2}\frac{d\lambda}{L}, \quad \frac{1}{2}\frac{d\mu}{M}, \quad \frac{1}{2}\frac{d\nu}{N}$$

die unendlich kleinen Längen auf den einzelnen Krümmungslinien an. Man soll dies geometrisch beweisen unter Berücksichtigung der in Üb. 7) a) zu § 35 angegebenen Bedeutung von λ, μ, ν.

e) Wenn wir ein festes Ellipsoid betrachten und deshalb ν als konstant ansehen, so wird das von zwei Paaren unendlich naher Krümmungslinien eingeschlossene Stück dO der Oberfläche gleich

$$dO = \frac{1}{4}\frac{d\lambda \cdot d\mu}{LM},$$

f) Das Raumelement dV kann man sich durch drei Paare benachbarter konfokaler Flächen begrenzt denken; daher ist

$$dV = \frac{1}{8}\frac{d\lambda \cdot d\mu \cdot d\nu}{L \quad M \quad N}.$$

g) Man löse die in b) angegebenen Gleichungen dadurch auf, dafs man die drei Gleichungen, welche man aus (2) erhält, indem man τ durch λ, μ, ν ersetzt, vollständig differentiiert.

h) Wenn man α, β, γ und λ, μ, ν mit einander vertauscht, hat man auch x^2, y^2, z^2 mit $-L^2$, $-M^2$, $-N^2$ zu vertauschen. Dadurch findet man Gleichungen zwischen den Gröfsen L^2, M^2, N^2.

10) Die Gleichung (12) für die vom Punkte (λ, μ, ν) ausgehenden Tangentialkegel soll direkt hergeleitet werden.

Sind X, Y, Z die Koordinaten für einen beliebigen Punkt des an die Fläche (2) gelegten Tangentialkegels, x, y, z die Koordinaten seiner Spitze, so ist die Gleichung des Kegels

$$\left(\frac{X^2}{\alpha-\tau}+\frac{Y^2}{\beta-\tau}+\frac{Z^2}{\gamma-\tau}-1\right)\left(\frac{x^2}{\alpha-\tau}+\frac{y^2}{\beta-\tau}+\frac{z^2}{\gamma-\tau}-1\right)$$
$$-\left(\frac{Xx}{\alpha-\tau}+\frac{Yy}{\beta-\tau}+\frac{Zz}{\gamma-\tau}-1\right)^2=0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung enthält nach Multiplikation mit $(\alpha-\tau)(\beta-\tau)(\gamma-\tau)$ die veränderliche Gröfse τ nur in der zweiten Potenz. Indem wir daher der Kürze wegen

$$\Phi(\tau)=P+Q\tau+R\tau^2$$

setzen, können wir die Koefficienten P, Q, R als Funktionen von X, Y, Z; x, y, z; α, β, γ derartig bestimmen, dafs $\Phi(\tau)=0$ die Gleichung des oben angegebenen Kegels ist.

Nun ist offenbar

$$\frac{\Phi(\lambda)}{(\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)}=-\left(\frac{xX}{\alpha-\lambda}+\frac{yY}{\beta-\lambda}+\frac{zZ}{\gamma-\lambda}-1\right)^2$$

u. s. w.

Wenn wir ferner unter ξ, η, ζ die senkrechten Abstände des Punktes (X, Y, Z) von den drei Ebenen verstehen, welche im Punkte (x, y, z) je eine der drei durch diesen Punkt hindurchgehenden konfokalen Flächen berühren, so ist unter Berücksichtigung der Übung 9) a):

$$\frac{Xx}{\alpha-\lambda}+\frac{Yy}{\beta-\lambda}+\frac{Zz}{\gamma-\lambda}-1=\frac{\xi}{L}$$

. . . . . .

Somit ist

$$P+Q\lambda+R\lambda^2=-(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)\xi^2$$
$$P+Q\mu+R\mu^2=-(\mu-\lambda)(\mu-\nu)\eta^2$$
$$P+Q\nu+R\nu^2=-(\nu-\lambda)(\nu-\mu)\zeta^2$$
$$P+Q\tau+R\tau^2=\Phi(\tau).$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$\Phi(\tau)=\xi^2(\mu-\tau)(\nu-\tau)+\eta^2(\lambda-\tau)(\nu-\tau)$$
$$+\zeta^2(\lambda-\tau)(\mu-\tau).$$

This book should be returned
the Library on or before the last
stamped below.

A fine of five cents a day is incu
by retaining it beyond the spec
time.

Please return promptly.

1927

3 2044 079 969 267